

Vorlesung 13.

Lorenz-Attraktor: erstes Beispiel vom dynamischen Chaos

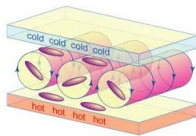


Kontext: Wettervorhersage.

Entstehung von Luftbewegungen infolge der thermischen Konvektion, angetrieben von der Sonneneinstrahlung in die Erdatmosphäre. (die aufgewärmten Elemente dehnen sich aus, werden leichter als die Umgebung, und – in einem Schwerkraftfeld – bewegen sie sich nach oben, wo sie sich abkühlen und wieder abtauchen.)

Atmosphäre wird als eine ebene Schicht betrachtet ($h \ll R_{\text{Erde}}$).

Einsetzende konvektive Strömung in dieser Schicht besteht aus zweidimensionalen rotierenden Rollen.



Typische Geschwindigkeiten sind viel kleiner als Schallgeschwindigkeit

⇒ Inkompressibilität

Problemstellung: **zwei**dimensionale thermische Konvektion
in einer ebenen Schicht aus einer inkompressiblen Flüssigkeit
(Rayleigh-Bénard Konvektion)

Variablen (Felder): *keine Abhängigkeit von der Koordinate y .*
Geschwindigkeit $\mathbf{v}(x, z, t)$, Temperatur $T(x, z, t)$, Druck $p(x, z, t)$.

Bewegungsgleichungen: Navier-Stokes $\rightarrow$ Boussinesq

$$\text{Impulserhaltung: } \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \nu \Delta \mathbf{v} + \mathbf{g}(1 - \beta(T - T_0))$$

$$\text{Energieerhaltung: } \frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) T = \chi \Delta T, \quad \text{Incompressibilität: } \operatorname{div} \mathbf{v} = 0$$

ρ : Dichte, ν : kinematische Viskosität, χ : Temperaturleitfähigkeit,
 $\mathbf{g}$: Schwerkraftbeschleunigung, β : Koeffizient thermischer Ausdehnung,
 T_0 : Gleichgewichtstemperatur, h : Höhe der flüssigen Schicht.

Randbedingungen: An der oberen und unteren Platten: $v_z = 0$.

Untere Platte: Temperatur T_1 ; obere Platte: Temperatur T_2 . $T_1 > T_2$



Dimensionslose Kriterien: Prandtl-Zahl $\sigma \equiv \frac{\nu}{\chi}$,

Rayleigh-Zahl $Ra \equiv \frac{g\beta(T_1 - T_2)h^3}{\chi\nu}$.

Inkompressibilität $\Rightarrow \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \Rightarrow \exists$ skalare *Stromfunktion* $\Psi(x, z, t)$:

$$\text{so dass } v_x = \frac{\partial \Psi}{\partial z}, \quad v_z = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}$$

Fourier-Zerlegung: Ψ und T sind Summen von Produkten zeitabhängiger Amplituden und räumlichen Funktionen (Wellenzahl a in x -Richtung)

$$\Psi(x, z, t) = \sum_{m,n=-\infty}^{\infty} \psi_{mn}(t) \exp\left(2\pi i \left(\frac{amx}{h} + \frac{nz}{2h}\right)\right)$$

$$T(x, z, t) = T_1 + \frac{(T_2 - T_1)z}{h} + \sum_{m,n=-\infty}^{\infty} \theta_{mn}(t) \exp\left(2\pi i \left(\frac{amx}{h} + \frac{nz}{2h}\right)\right)$$

Nach einer Multiplikation mit $\exp\left(2\pi i \left(\frac{ajx}{h} + \frac{kz}{2h}\right)\right)$ mit j, k ganzzahlig, und Integration über Schichtvolumen (*Orthogonalität!*) entsteht ein unendlicher Satz gekoppelter gewöhnlichen DGL für $\dot{\psi}_{mn}(t)$ und $\dot{\theta}_{mn}(t)$.

Edward Lorenz: **Reduktion auf drei Variablen:**

*(Bezeichnungen für diese Variablen nach Lorenz sind etwas ungelentk:
wieder x, y, z , die aber nichts mit räumlichen Koordinaten zu tun haben)*

$x(t) \sim \psi_{11}(t)$: Amplitude der ersten Fourier-Mode
von der Stromfunktion Ψ (Geschwindigkeitsfeld);
 $y(t) \sim \theta_{11}(t)$, $z(t) \sim \theta_{02}(t)$: Amplituden von zwei Fourier-Moden
des Temperaturfeldes T .

$$\dot{x} = \sigma(y - x)$$

$$\dot{y} = r x - y - x z$$

$$\dot{z} = x y - b z,$$

Parameter:

- σ ist die Prandtl-Zahl von der Flüssigkeit ($\sigma > 0$),
- r ist die „normierte“ Rayleigh-Zahl: $r \equiv \frac{Ra}{Ra_0}$, $Ra_0 = \frac{\pi^4(1+a^2)^3}{a^2}$,
(Erinnerung: a ist die Wellenzahl der Konvektionsrollen),
- b ist der geometrische Parameter: $b = \frac{4}{1+a^2}$ ($b > 0$).

Eigenschaften von Lorenz-Gleichungen

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \sigma(y - x) \\ \dot{y} &= rx - y - xz \\ \dot{z} &= xy - bz,\end{aligned}$$



- ▷ $\operatorname{div}(\mathbf{f}) = -\sigma - 1 - b = \operatorname{const} < 0 \rightarrow$ Phasenvolumen jeder kompakten Menge von Anfangsbedingungen schrumpft exponentiell im Laufe der Zeit:

$$V(t) = V(0)e^{-(\sigma+b+1)t}$$

- ▷ Dissipativität (Anwesenheit von einem absorbierenden Gebiet im Phasenraum).

- ▷ Symmetrie bezüglich der Transformation $\begin{cases} x \rightarrow -x \\ y \rightarrow -y \end{cases}$.

Gleichgewichte von Lorenz-Gleichungen

$$0 = \sigma(y - x)$$

$$0 = r x - y - x z$$

$$0 = x y - b z,$$



$$y = x \Rightarrow \begin{cases} r x - x - x z = 0 \\ x^2 - b z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(r - 1 - z) = 0 \\ x^2 = b z \end{cases}$$

Entweder $x = 0 \Rightarrow y = x = 0 \Rightarrow z = \frac{x^2}{b} = 0$ (keine Bewegung),

oder $z = r - 1 \Rightarrow x = y = \pm \sqrt{b z} = \pm \sqrt{b(r - 1)}.$

Gleichgewicht $x=y=z=0$ existiert bei allen Parameterwerten.

Zwei Gleichgewichte $x = y = \pm \sqrt{b(r - 1)}, z = r - 1$
existieren nur bei $r > 1$.

Bei $r = 1$ findet eine Heugabel-Bifurkation statt.

Attraktoren von Lorenz-Gleichungen

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \sigma(y - x) \\ \dot{y} &= rx - y - xz \\ \dot{z} &= xy - bz,\end{aligned}$$



Bei $r < 1$: Gleichgewicht $x=y=z=0$ ist global asymptotisch stabil.

Bei $r = 1$: superkritische Heugabel-Bifurkation.

Bei $1 < r < r_{AH}$: die Attraktoren sind zwei Gleichgewichte

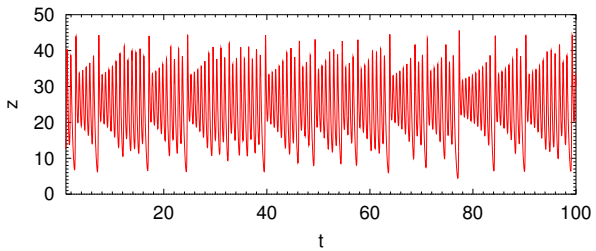
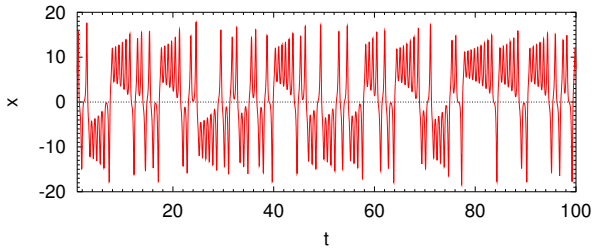
$$\text{mit } x = y = \pm \sqrt{b(r-1)}, \quad z = r - 1.$$

Bei $r = r_{AH} = \sigma \frac{\sigma + b + 3}{\sigma - b - 1}$: subkritische Andronov-Hopf Bifurkation.

Bei $r > r_{AH}$: ??



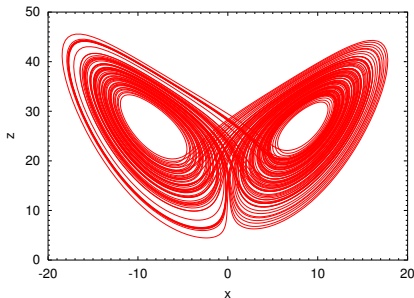
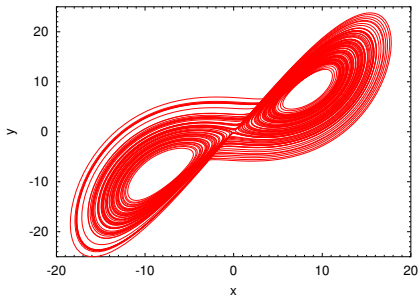
Numerische Integration bei $\sigma = 10$, $b = 8/3$, $r = 28 > r_{AH}$.



Irreguläre **a**periodische Schwingungen

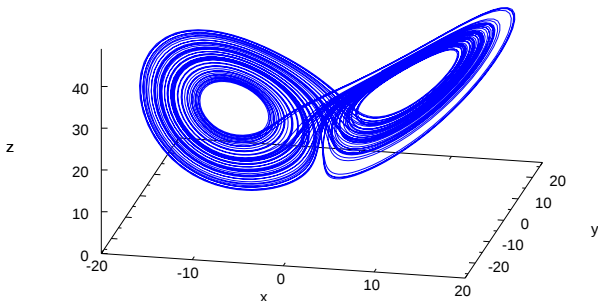


Projektionen vom Phasenportrait bei $\sigma = 10$, $b = 8/3$, $r = 28$.



Es existiert eine Menge von Punkten im Phasenraum,
zu der **fast alle** (mit Ausnahme der Menge mit Maß Null)
Trajektorien mit der Zeit konvergieren,
und entlang welcher sie sich dann unaufhörlich bewegen.
Diese Menge wird **Lorenz-Attraktor** genannt.

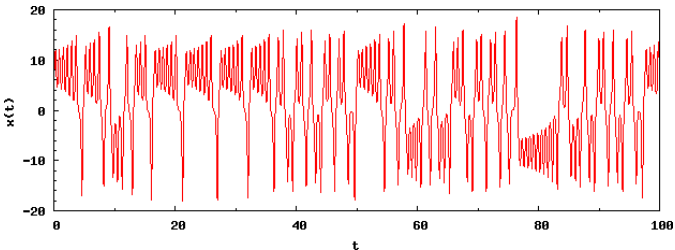
Lage vom Attraktor im 3D-Raum



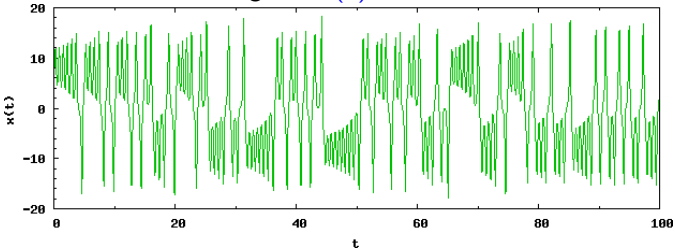
Auf den ersten Blick besteht der Attraktor aus den zwei flachen Flügel.
 Die Trajektorie ist aber in **keiner** zwei-dimensionalen Fläche eingebettet!.
 Der Attraktor ähnelt in jedem **2D**-Schnitt einer **Cantor-Menge**.
 Das ist Beispiel von einem **seltsamen Attraktor** (strange attractor).
 Numerische Schätzung der **fraktalen** Dimension: $D \approx 2.05$.



Empfindlichkeit gegenüber Anfangsbedingungen

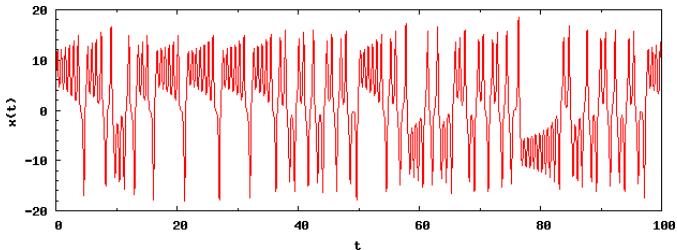


Bei Änderung von $x(0)$ um $\delta_x = 10^{-2}$:

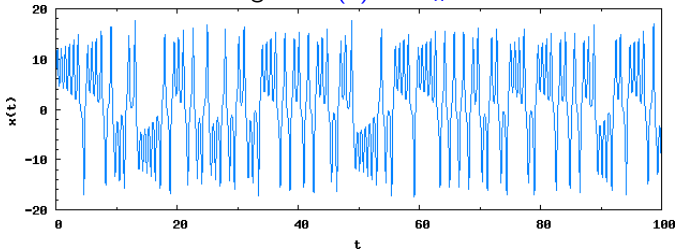




Empfindlichkeit gegenüber Anfangsbedingungen

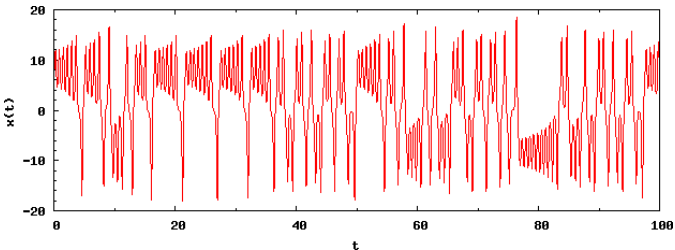


Bei Änderung von $x(0)$ um $\delta_x = 10^{-4}$:

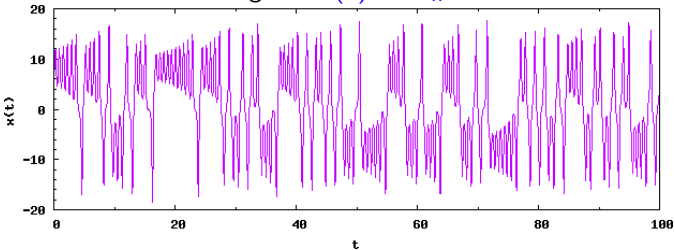


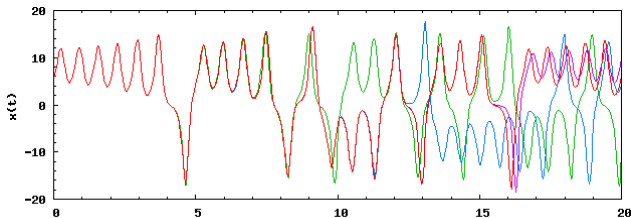


Empfindlichkeit gegenüber Anfangsbedingungen



Bei Änderung von $x(0)$ um $\delta_x = 10^{-6}$:





Benachbarte Trajektorien laufen auseinander:

jede einzelne Trajektorie auf dem Attraktor ist instabil.

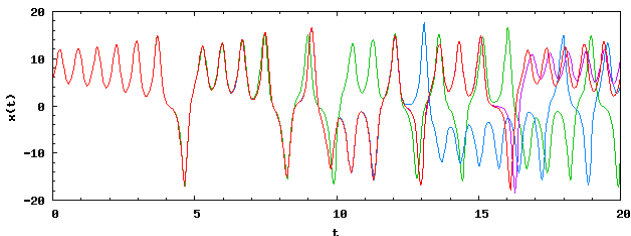
Das macht langzeitige Vorhersagen kaum möglich.

Inbesondere *Wettervorhersagen* (vorausgesetzt, die Gleichungen, die *echtes* Wetter beschreiben, teilen diese Eigenschaft):

für adäquate Anfangsbedingungen braucht man ein dichtes 3D-Gitter aus Wetterstationen mit unendlich genauen Messwerten (Temperatur, Druck, Windrichtung, Windstärke...).

⇒ Schmetterlingseffekt (*butterfly effect*)

Siehe *A Sound of Thunder*, eine Sci-Fi-Erzählung vom Ray Bradbury (1952 publiziert) über eine Zeitreise aus dem Jahr 2055 zurück.



Benachbarte Trajektorien laufen auseinander:

jede einzelne Trajektorie auf dem Attraktor ist instabil

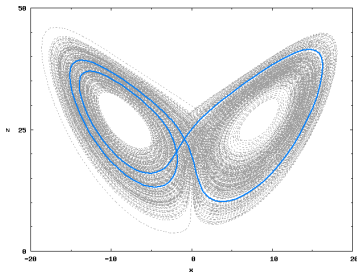
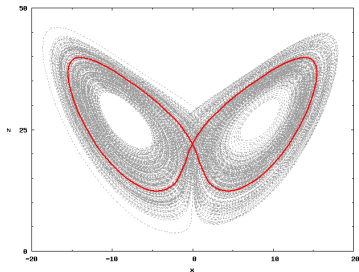
aber deren Gesamtheit wirkt anziehend

maximaler Abstand zwischen den Bahnen wird begrenzt
durch die endliche Größe vom Attraktor.

Im Laufe der Zeit kommen die chaotischen Orbits immer wieder
beliebig nah zueinander und entfernen sich erneut.

(Stabilität nach Poisson) .

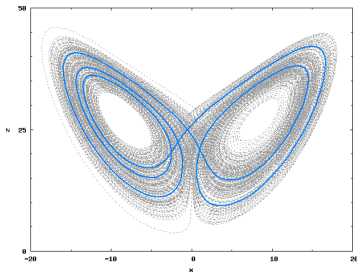
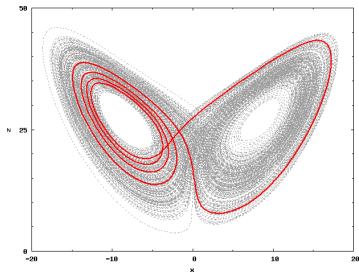
Im chaotischen Attraktor sind **unendlich viele**
instabile periodische Orbits eingebettet:



embedded **unstable periodic orbits** $\rightarrow$ UPOs

Im Laufe der Zeit kommt eine chaotische Phasentrajektorie
jedem UPO (und zwar immer wieder!) beliebig nah.

Im chaotischen Attraktor sind **unendlich viele**
instabile periodische Orbits eingebettet:

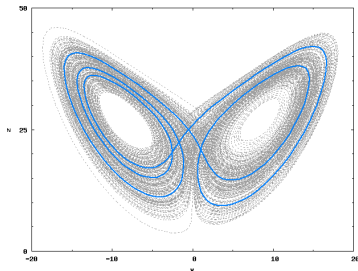
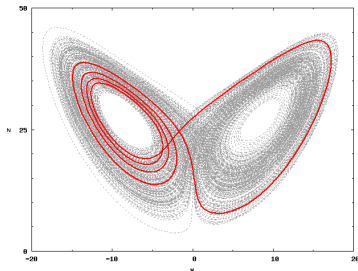


embedded **unstable periodic orbits** $\rightarrow$ UPOs

Im Laufe der Zeit kommt eine chaotische Phasentrajektorie
jedem UPO (und zwar immer wieder!) beliebig nah.



Im chaotischen Attraktor sind **unendlich viele instabile periodische Orbits** eingebettet:



embedded **unstable periodic orbits** $\rightarrow$ UPOs

Was ist der Ursprung all dieser geschlossenen Bahnen?
(es gibt ja bei der Lorenz-Gleichungen **nur eine** Andronov-Hopf Bifurkation!).



- ▷ Edward Lorenz: *Deterministic non-periodic flow*, 1963.
- ▷ David Ruelle, Floris Takens: *strange attractors*, 1971:
"Going back to the vector field X , we have thus a "strange" attractor which is locally the product of a Cantor set and a piece of two-dimensional manifold."

anziehende Mengen im Phasenraum,
die **keine** Mannigfaltigkeiten sind.

- ▷ James Yorke: *chaos*, 1975. "Period three implies chaos":
unendlich viele periodische Lösungen.
- ▷ Lorenz-Attraktor ist **seltsam und chaotisch**:
- ▷ „seltsam“ (*strange*) bezieht sich auf seine Geometrie im Phasenraum:
keine Mannigfaltigkeit,
„chaotisch“ charakterisiert die zeitliche Dynamik.

-
- ▷ Mary Cartwright, John Littlewood (Journ. London Math.Soc. 1945):
"On nonlinear differential equation of the 2nd order:
 $\ddot{y} + k(1 - y^2)\dot{y} + y = b\lambda k \cos(\lambda t + \alpha), \quad k \text{ large.}"$
"If, however, $b < 2/3$ and k is large enough,
equation shows a rich variety of behaviour, some of it very bizarre".