

Vorlesung 14.

Entstehung vom chaotischen Attraktor im Phasenraum der Lorenz-Gleichungen





$$\dot{x} = \sigma(y - x)$$

$$\dot{y} = rx - y - xz$$

$$\dot{z} = xy - bz$$



- ▷ $\operatorname{div}(\mathbf{f}) = -\sigma - 1 - b = \text{const} < 0 \rightarrow$ *Phasenvolumen jeder Menge von Anfangsbedingungen schrumpft exponentiell im Laufe der Zeit.*
- ▷ Dissipativität (Anwesenheit von einem absorbierenden Gebiet im Phasenraum).
- ▷ **Symmetrie** bezüglich der Transformation $\left\{ \begin{array}{l} x \rightarrow -x \\ y \rightarrow -y \end{array} \right\}$.

Wir fixieren die Werte von Parametern σ und b , erhöhen den Wert von r und verfolgen Änderungen in der Art und Struktur des Attraktors.



$$\begin{aligned}\dot{x} &= \sigma(y - x) \\ \dot{y} &= rx - y - xz \\ \dot{z} &= xy - bz\end{aligned}$$

Bei $r < 1$: Gleichgewicht $x=y=z=0$ ist **global asymptotisch stabil**.

Bei $r = 1$ (unabhängig von Werten von σ und b): **superkritische Heugabel-Bifurkation**.

Bei $1 < r < r_{AH}$: die Attraktoren sind zwei **symmetrische** Gleichgewichte (**sG**) mit $x = y = \pm\sqrt{b(r-1)}$, $z = r - 1$.

Bei $r = r_{AH} = \sigma \frac{\sigma + b + 3}{\sigma - b - 1}$: **subkritische** Andronov-Hopf Bifurkation von **sG**.

Bei „kanonischen“ Parameterwerten ($\sigma = 10$, $b = 8/3$), $r_{AH} = 24.7368 \dots$

Bei $r > r_{AH}$: **chaotischer Attraktor**.

Eigentlich sind **anhaltende** chaotische Schwingungen bei passenden Anfangsbedingungen schon ab etwa $r \approx 24.06$ zu sehen;

im Intervall $24.06 < r < r_{AH}$ koexistieren sie mit (noch) stabilen **sG**.

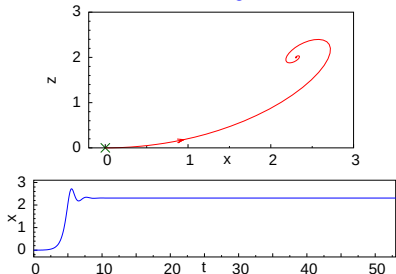
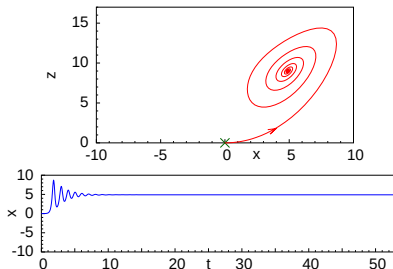
Kurzlebige transiente chaotische Schwankungen sieht man schon ab $r \approx 14$.

Frage: wie entsteht im Phasenraum der chaotische Attraktor?

Und: *woher kommen die ganzen instabilen periodischen Orbits?*



Wir integrieren die Lorenz-Gleichungen *numerisch* für unterschiedliche Werte von r ,
mit immer demselben Anfangspunkt
in unmittelbarer Nähe vom instabilen Gleichgewicht $x=y=z=0$ (auf den Plots durch *Kreuz*
gekennzeichnet).
Dies gibt uns Aufschluss über die Veränderungen in der Geometrie
der instabilen Mannigfaltigkeit von diesem Gleichgewicht.

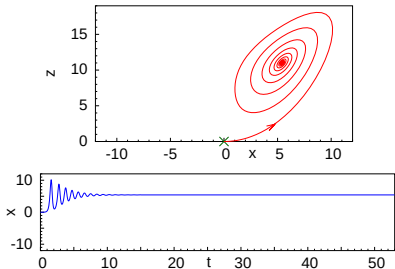
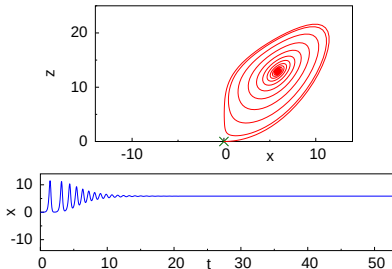
 $r = 3$  $r = 10$ 

In beiden Fällen wickelt sich die Mannigfaltigkeit auf ein Gleichgewicht
(*stabiler Fokus-Punkt*) im Halbraum $x > 0$.

Bei dem höheren Wert von r ist die allererste „Umdrehung“ deutlich größer.



Wir integrieren die Lorenz-Gleichungen *numerisch* für unterschiedliche Werte von r ,
mit immer demselben Anfangspunkt
in unmittelbarer Nähe vom instabilen Gleichgewicht $x=y=z=0$.
Dies gibt uns Aufschluss über die Veränderungen in der Geometrie
der instabilen Mannigfaltigkeit von diesem Gleichgewicht.

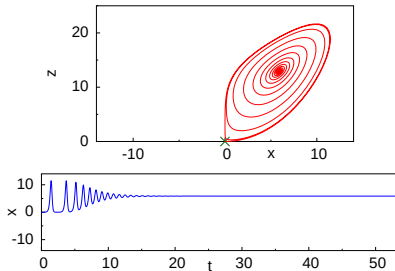
 $r = 12$  $r = 13.9$ 

Die Mannigfaltigkeit wickelt sich weiterhin auf einen stabilen Fokus mit $x > 0$.
Nach der ersten Umdrehung kommt der Orbit immer näher zum Ursprung.

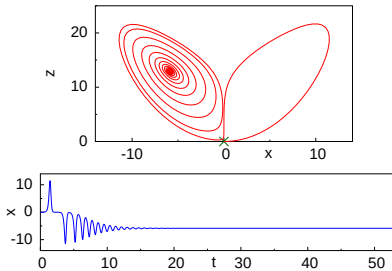


Wir integrieren die Lorenz-Gleichungen *numerisch* für unterschiedliche Werte von r ,
mit immer demselben Anfangspunkt
in unmittelbarer Nähe vom instabilen Gleichgewicht $x=y=z=0$.
Dies gibt uns Aufschluss über die Veränderungen in der Geometrie
der instabilen Mannigfaltigkeit von diesem Gleichgewicht.

$r = 13.926$



$r = 13.927$

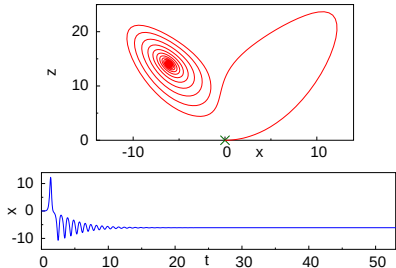
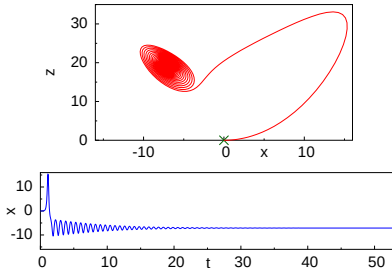


Umschaltung der Asymptotik: vom *stabilen Fokus* im Halbraum $x > 0$
zum *spiegelsymmetrischen stabilen Fokus* im Halbraum $x < 0$.

Dazwischen kehrt die instabile Mannigfaltigkeit exakt zurück zum Ursprung
und bildet damit eine biasymptotische Trajektorie: die **Homokline**.



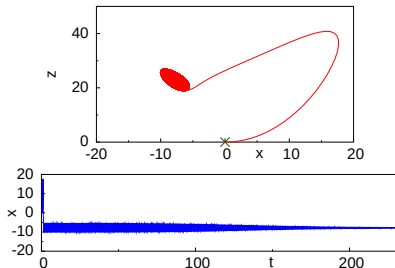
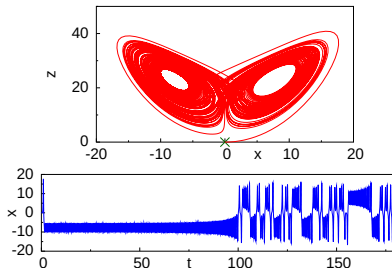
Wir integrieren die Lorenz-Gleichungen *numerisch* für unterschiedliche Werte von r ,
mit immer demselben Anfangspunkt
in unmittelbarer Nähe vom instabilen Gleichgewicht $x=y=z=0$.
Dies gibt uns Aufschluss über die Veränderungen in der Geometrie
der instabilen Mannigfaltigkeit von diesem Gleichgewicht.

 $r = 15$  $r = 20$ 

Die Mannigfaltigkeit wickelt sich weiterhin auf einen stabilen Fokus mit $x < 0$.
Dabei wird die Spirale zu diesem Fokus immer enger.



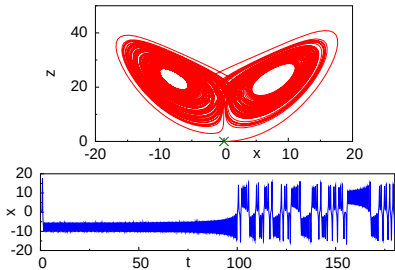
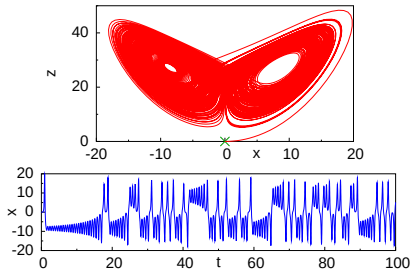
Wir integrieren die Lorenz-Gleichungen *numerisch* für unterschiedliche Werte von r ,
mit immer demselben Anfangspunkt
in unmittelbarer Nähe vom instabilen Gleichgewicht $x=y=z=0$.
Dies gibt uns Aufschluss über die Veränderungen in der Geometrie
der instabilen Mannigfaltigkeit von diesem Gleichgewicht.

 $r = 24.05$  $r = 24.07$ 

Die nächste Umschaltung: statt sich auf den Fokus aufzuwickeln (linkes Bild),
erst rollt die Spirale langsam nach außen ab,
und **dann** beginnen die chaotische Oszillationen (rechtes Bild).



Wir integrieren die Lorenz-Gleichungen *numerisch* für unterschiedliche Werte von r ,
mit immer demselben Anfangspunkt
in unmittelbarer Nähe vom instabilen Gleichgewicht $x=y=z=0$.
Dies gibt uns Aufschluss über die Veränderungen in der Geometrie
der instabilen Mannigfaltigkeit von diesem Gleichgewicht.

 $r = 24.07$  $r = 28$ 

Das klassische Bild vom chaotischen Lorenz-Attraktor im Phasenraum:
der Übergang zum Chaos ist vollzogen.

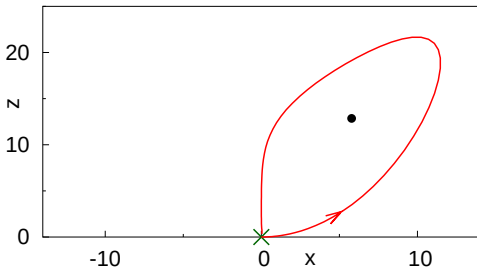
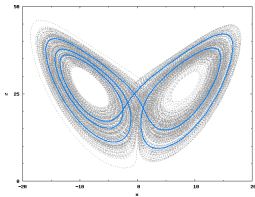


Homoclinic bifurcation

$$R = 13.926 \dots$$

Da die Homokline eine geschlossene Phasenbahn ist, hinterlässt deren Zerfall einen periodischen Orbit.

Eine Homokline $\Rightarrow$ ein Orbit.

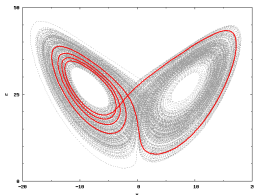
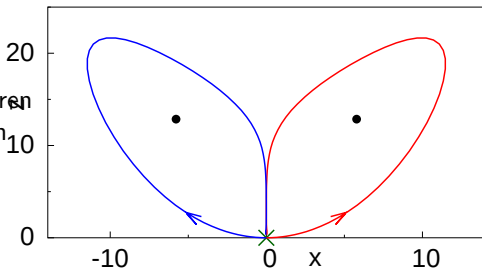




Homoclinic bifurcation

$$R = 13.926 \dots$$

Wegen der Spiegelsymmetrie der Lorenz-Gleichungen, existieren die Homoklinen im Phasenraum immer paarweise.



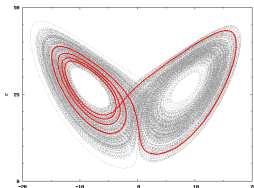
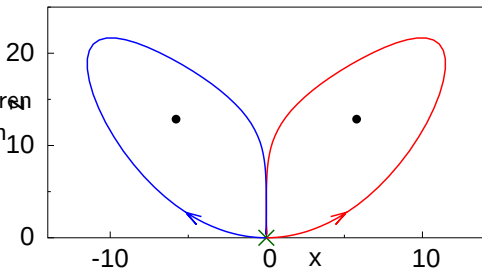
Beim Zerfall vom Homoklinenpaar entsteht hingegen eine **unendliche** Zahl von periodischen Orbits. Diese Orbits unterscheiden sich voneinander durch die **Anzahl und Reihenfolge** vom Umdrehungen im Phasenraum **links** und **rechts** vom instabilen Gleichgewicht.



Homoclinic bifurcation

$$R = 13.926 \dots$$

Wegen der Spiegelsymmetrie der Lorenz-Gleichungen, existieren die Homoklinen im Phasenraum immer paarweise.



Wir führen **binäre symbolische Dynamik** ein:
jede Umdrehung **links** vom Ursprung $\rightarrow L$,
jede Umdrehung **rechts** vom Ursprung $\rightarrow R$.
z.B. **Label** des Orbits am linken Bild: **RLLLL**.
(oder alle zyklische Vertauschungen davon).

Bei dem Zerfall vom Homoklinen-Paar entstehen im Phasenraum **instabile** periodische Bahnen mit **allen** binären symbolischen Labels: von kürzesten **Labels** **L** und **R** (je 1 Umdrehung im Phasenraum) bis zu beliebig langen binären **Labels**.

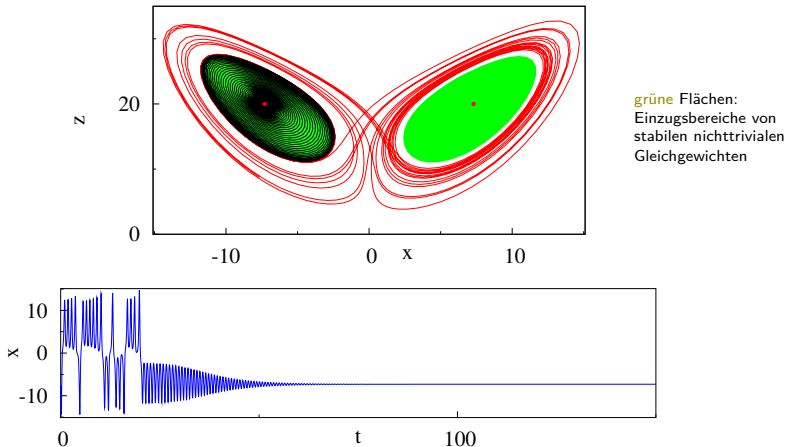


- ▷ Nach der Entstehung bei $r = r_{\text{hom}} = 13.926$ und dem *sofortigen* Zerfall vom symmetrischen Paar der Homoklinen verbleibt im Phasenraum eine unendliche Anzahl (*abzählbare* Menge) von *instabilen periodischen Bahnen*.
- ▷ Gesamtheit dieser Bahnen bildet das Gerippe (*skeleton*) für ein *Kontinuum* von *chaotischen Phasentrajektorien*, eine Art Baugerüst für den zukünftigen chaotischen Attraktor.
- ▷ Warum „zukünftigen“?
Weil dieses Kontinuum als ganzes sofort nach seiner Geburt noch *instabil* ist: es enthält „Löcher“ (Lücken), durch die die Trajektorien durchfallen um dann zu anderen Attraktoren (stabilen Gleichgewichten) zu entlaufen.
- ▷ In diesem Bereich von r -Werten existiert *“metastable chaos”*: für typische Anfangsbedingungen beobachtet man eine Zeit lang *ungeordnete Schwingungen*, die plötzlich in eine schnelle Relaxation zum stabilen Gleichgewicht übergehen.
- ▷ Früher oder später, nach mehreren Umschwungen zwischen $x > 0$ und $x < 0$, kommt jede *chaotische* Trajektorie in den lokalen Einzugsgebiet von einem der Gleichgewichte und endet dort als eine Spirale “nach innen”.



Wir integrieren die Lorenz-Gleichungen *numerisch* für unterschiedliche Werte von r ...

$$r = 21$$

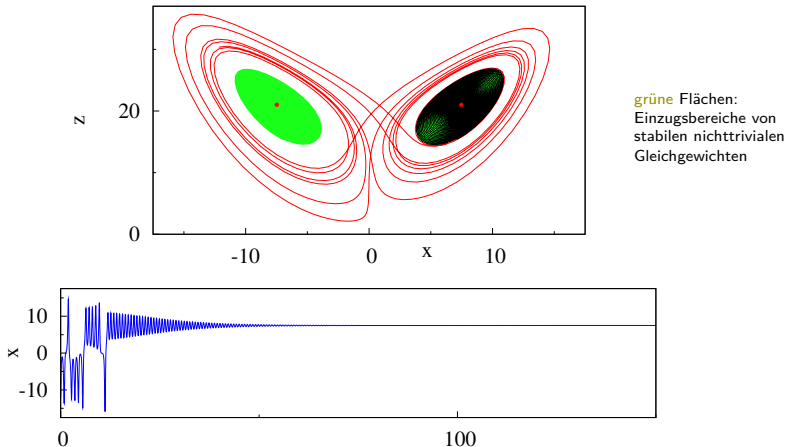


Auf die anfänglichen “chaotischen” Oszillationen folgen gedämpfte Schwingungen um stabiles Gleichgewicht.



Wir integrieren die Lorenz-Gleichungen *numerisch* für unterschiedliche Werte von r ...

$r = 22$

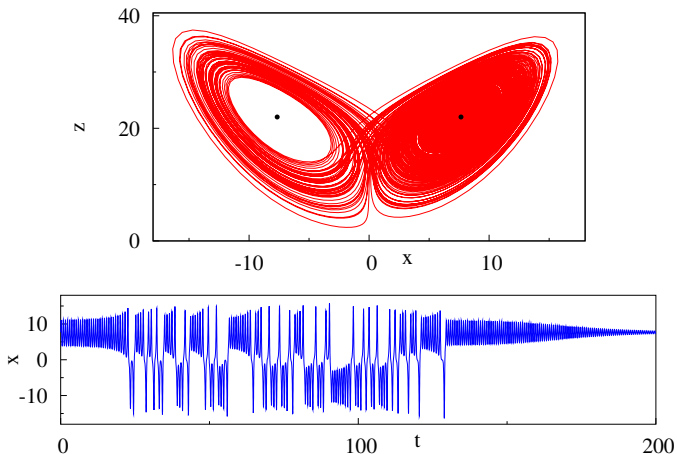


Auf die anfänglichen "chaotischen" Oszillationen folgen gedämpfte Schwingungen um stabiles Gleichgewicht.



Wir integrieren die Lorenz-Gleichungen *numerisch* für unterschiedliche Werte von r ...

$r = 23$

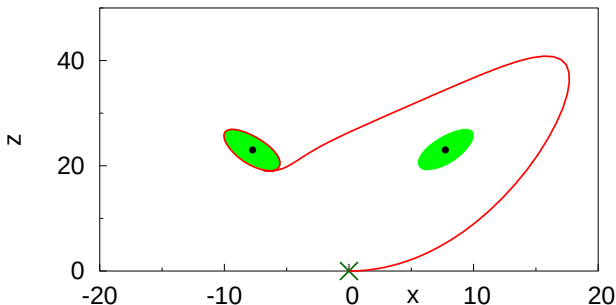


Mit dem Wachstum von r
wird die vorübergehende chaotische Phase immer länger.



Wir integrieren die Lorenz-Gleichungen *numerisch* für unterschiedliche Werte von r ...

$$r = 24.0579$$



grüne Flächen:
Einzugsbereiche von
stabilen nichttrivialen
Gleichgewichten

Bei diesem Wert von r endet im Phasenraum die instabile Mannigfaltigkeit vom trivialen Gleichgewicht $(0, 0, 0)$ unmittelbar an der instabilen periodischen Lösung, die im Phasenraum den Einzugsbereich des (noch stabilen) Fokuspunktes abgrenzt. Bei höheren Werten von r hören die chaotischen Schwingungen nicht mehr auf: vorläufiges Chaos wird zum endgültigen Chaos.



- ▷ Entstehung bei $r = r_{\text{hom}} = 13.926$ und *sofortiger* Zerfall vom symmetrischen Paar der Homoklinen hinterlassen im Phasenraum eine unendliche Anzahl (*abzählbare* Menge) von *instabilen periodischen Bahnen*.

Gesamtheit dieser Bahnen bildet das Gerippe (*skeleton*) für ein *Kontinuum* von *chaotischen Phasentrajektorien*, eine Art Baugerüst für den zukünftigen chaotischen Attraktor.

Warum „zukünftigen“?

Weil dieses Kontinuum als ganzes sofort nach seiner Geburt noch *instabil* ist: es enthält „Löcher“ (Lücken), durch die die Trajektorien durchfallen um dann zu anderen Attraktoren (stabilen Gleichgewichten) zu entlaufen.

In diesem Bereich von r -Werten existiert „*metastable chaos*“: für typische Anfangsbedingungen beobachtet man eine Zeit lang *ungeordnete Schwingungen*,

die plötzlich in eine schnelle Relaxation zum stabilen Gleichgewicht übergehen.

Mit Wachstum von r wächst auch die Lebenszeit der *chaotischen Transiente*, dafür wird die nachfolgende Relaxation zum Gleichgewicht etwas langsamer.

Bei $r = 24.0579$ schließen sich die „Lücken“, dadurch wird die chaotische Menge stabilisiert: sie wird zum *chaotischen Attraktor*.