

Übergang *Ordnung* $\Leftrightarrow$ *Chaos*.
Universelle Bifurkationsszenarien.





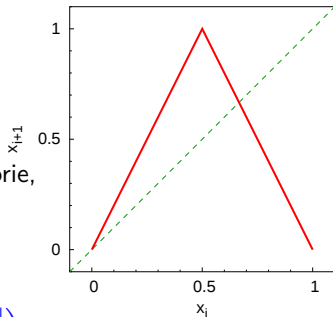
Wie entsteht Chaos aus der Ordnung (z.B. aus periodischer Dynamik) bei einer Parameter-Änderung in einem dynamischen System?

Woher kommt die **unendliche** Anzahl von instabilen periodischen Lösungen?

Beispiel: stückweise-stetige **Tent-mapping** vom Intervall $[0, 1]$:

$$x_{i+1} = \begin{cases} 2x_i & 0 < x_i \leq 1/2 \\ 2(1 - x_i) & 1/2 < x_i \leq 1 \end{cases}$$

Jede **rationale** Anfangsbedingung $x = k/m$ ($k < m$ sind ganz, positiv und teilerfremd) **liegt an** oder **führt zu** einer **periodischen** Trajektorie, die sich nach $p < m$ Iterationen schließt. Alle periodische Trajektorien sind **instabil**: haben (*Kettenregel!*) Multiplikator 2^p oder -2^p .



Lyapunov-Exponent: $\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \left(\left| \prod_{i=1}^n f'(x_i) \right| \right) = \ln(2) > 0$.

$\Rightarrow$ Tent-mapping ist **chaotisch**.



Wie entsteht bei einer Parameter-Änderung in einem dynamischen System Chaos aus der Ordnung (z.B. aus periodischer Dynamik)?

Versuch: stückweise-stetige **Zelt-Abbildung** vom Intervall $[0, 1]$:

$$x_{i+1} = \begin{cases} a x_i & 0 < x_i \leq 1/2 \\ a(1 - x_i) & 1/2 < x_i \leq 1 \end{cases}$$

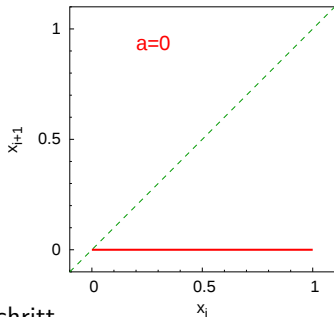
mit $a \geq 0$; $\forall x: |f'(x)| = a$.

Lyapunov-Exponent:

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \left(\left| \prod_{i=1}^n f'(x_i) \right| \right) = \ln(a)$$

Bei $a = 0$: $\lambda = -\infty$

das ganze Intervall wird in einem einzigen Schritt in den Fixpunkt $x = 0$ abgebildet.





Wie entsteht bei einer Parameter-Änderung in einem dynamischen System Chaos aus der Ordnung (z.B. aus periodischer Dynamik)?

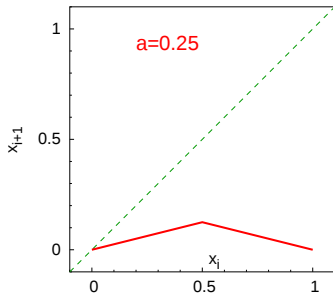
Versuch: stückweise-stetige **Zelt-Abbildung** vom Intervall $[0, 1]$:

$$x_{i+1} = \begin{cases} a x_i & 0 < x_i \leq 1/2 \\ a(1 - x_i) & 1/2 < x_i \leq 1 \end{cases}$$

mit $a \geq 0$.

Lyapunov-Exponent:

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \left(\left| \prod_{i=1}^n f'(x_i) \right| \right) = \ln(a)$$



Bei $a < 1$: $\lambda < 0$

Abbildung ist überall **kontrahierend**: Abstände zwischen den Punkten werden mit jeder Iteration **um den Faktor a** kleiner.

Attraktor: Fixpunkt bei $x = 0$. **Kein Chaos.**



Wie entsteht bei einer Parameter-Änderung in einem dynamischen System Chaos aus der Ordnung (z.B. aus periodischer Dynamik)?

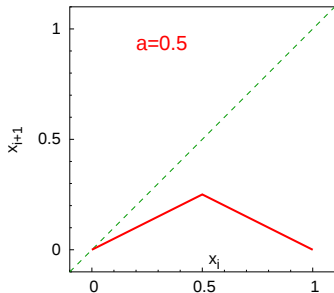
Versuch: stückweise-stetige **Zelt-Abbildung** vom Intervall $[0, 1]$:

$$x_{i+1} = \begin{cases} a x_i & 0 < x_i \leq 1/2 \\ a(1 - x_i) & 1/2 < x_i \leq 1 \end{cases}$$

mit $a \geq 0$.

Lyapunov-Exponent:

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \left(\left| \prod_{i=1}^n f'(x_i) \right| \right) = \ln(a)$$



Bei $a < 1$: $\lambda < 0$

Abbildung ist überall **kontrahierend**: Abstände zwischen den Punkten werden mit jeder Iteration **um den Faktor a** kleiner.

Attraktor: Fixpunkt bei $x = 0$. **Kein Chaos.**



Wie entsteht bei einer Parameter-Änderung in einem dynamischen System Chaos aus der Ordnung (z.B. aus periodischer Dynamik)?

Versuch: stückweise-stetige **Zelt-Abbildung** vom Intervall $[0, 1]$:

$$x_{i+1} = \begin{cases} a x_i & 0 < x_i \leq 1/2 \\ a(1 - x_i) & 1/2 < x_i \leq 1 \end{cases}$$

mit $a \geq 0$.

Lyapunov-Exponent:

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \left(\left| \prod_{i=1}^n f'(x_i) \right| \right) = \ln(a)$$

Bei $a = 1$: $\lambda = 0$

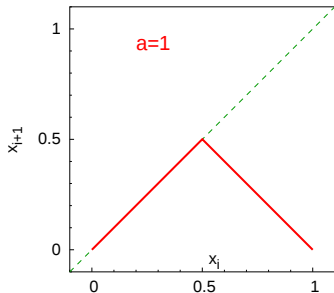


Abbildung lässt jeden Punkt im Abschnitt $[0, 1/2]$ an der Stelle.
Abstände zwischen den Punkten aus diesem Abschnitt bleiben konstant.
Kontinuum von (neutral stabilen) Fixpunkten. **Kein Chaos.**



Wie entsteht bei einer Parameter-Änderung in einem dynamischen System Chaos aus der Ordnung (z.B. aus periodischer Dynamik)?

Versuch: stückweise-stetige **Zelt-Abbildung** vom Intervall $[0, 1]$:

$$x_{i+1} = \begin{cases} a x_i & 0 < x_i \leq 1/2 \\ a(1 - x_i) & 1/2 < x_i \leq 1 \end{cases}$$

Lyapunov-Exponent:

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \left(\left| \prod_{i=1}^n f'(x_i) \right| \right) = \ln(a)$$

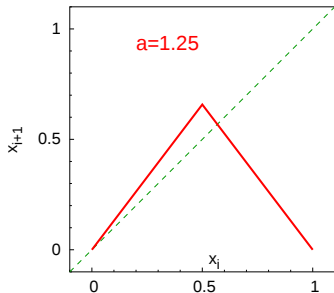
Bei $1 < a \leq 2$: $\lambda > 0$.

Abbildung ist überall **expandierend**:

Abstände zwischen den Punkten wachsen mit jeder Iteration um den Faktor a .

Attraktor: das ganze Intervall $[0, a/2)$ wird zum **chaotischen** Attraktor.

mit $a \geq 0$.





Wie entsteht bei einer Parameter-Änderung in einem dynamischen System Chaos aus der Ordnung (z.B. aus periodischer Dynamik)?

Versuch: stückweise-stetige **Zelt-Abbildung** vom Intervall $[0, 1]$:

$$x_{i+1} = \begin{cases} a x_i & 0 < x_i \leq 1/2 \\ a(1 - x_i) & 1/2 < x_i \leq 1 \end{cases}$$

Lyapunov-Exponent:

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \left(\left| \prod_{i=1}^n f'(x_i) \right| \right) = \ln(a)$$

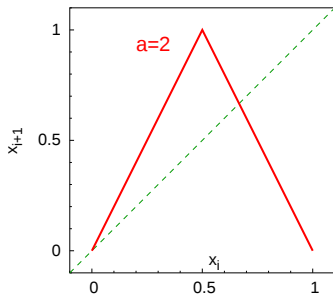
Bei $a = 2$: $\lambda > 0$.

Abbildung ist überall **expandierend**:

Abstände zwischen den *nahen* Punkten **verdoppeln** sich mit jeder Iteration.

Chaotischer Attraktor bei $a = 2$: das ganze Intervall $[0, 1]$.

mit $a \geq 0$.





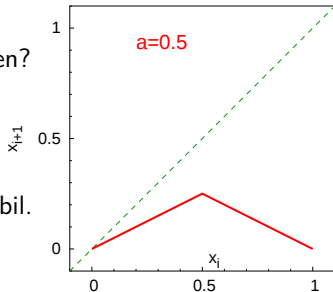
Und was ist mit den periodischen Bahnen?
Bei welchen Werten von a werden sie geboren?

Bei allen $a < 1$ gibt es
nur **einen** einzigen Fixpunkt: $x = 0$.

Multiplikator ist $\mu = a < 1$: Fixpunkt ist stabil.

Es gibt **keine** periodische Trajektorien
mit höheren Perioden:

überall auf dem Intervall außer $x = 0$ gilt $x_{i+1} < x_i$,
so dass sukzessive Iterationen monoton abnehmen
und gegen 0 konvergieren.





Und was ist mit den periodischen Bahnen?
Bei welchen Werten von a werden sie geboren?

Bei allen $a > 1$ gibt es **zwei** Fixpunkte:
(grüne Kreise auf der Skizze rechts)

$$x = 0 \text{ und } x = \frac{a}{1+a}.$$

Betrag vom Multiplikator ist $|\mu| = a > 1$:
beide Fixpunkte sind instabil.

Außerdem gibt es unendlich viele periodische Trajektorien
mit **beliebig großen** Perioden.

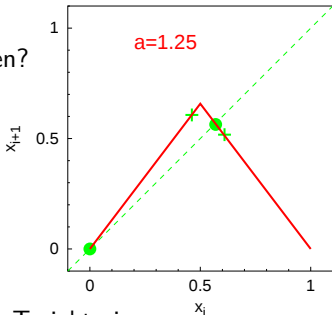
So z.B. bei jedem $N > 1 \quad \exists$ ein periodischer Orbit aus 2^N Punkten.

Orbit mit Länge 2 (Plus-Zeichen auf der Skizze) besteht aus **zwei** Punkten:

$$x_1 = \frac{a}{1+a^2} \text{ (links von } 1/2) \text{ und } x_2 = \frac{a^2}{1+a^2} \text{ (rechts von } 1/2).$$

Multiplikator ist $-a^2 < -1 \Rightarrow$ Orbit ist instabil.

Orbit mit Länge 4: $x_1 = \frac{a(1+a+a^2)}{1+a^4}$, $x_2 = \frac{a^2(1+a+a^2)}{1+a^4}$, $x_3 = \frac{a(1-a^2+a^3)}{1+a^4}$, $x_4 = \frac{a(1-a+a^3)}{1+a^4}$, usw.





Wie entsteht bei einer Parameter-Änderung in einem dynamischen System Chaos aus der Ordnung (z.B. aus periodischer Dynamik)?

Woher kommt die **unendliche** Anzahl von instabilen periodischen Lösungen?

Beispiel: *parameter-abhängige* Abbildung

$$x_{i+1} = f(x_i) = \begin{cases} a x_i & 0 < x_i \leq 1/2 \\ a(1 - x_i) & 1/2 < x_i \leq 1 \end{cases} .$$

Wir haben tatsächlich gesehen, dass der Attraktor dieser Abbildung sich bei Änderung von **a** aus dem stabilen Fixpunkt
in den chaotischen Attraktor verwandelt.

Aber es war sprunghaft: beim beliebig kleinen Überschreiten von **a = 1**.

Auch die Herkunft der **unendlichen** Anzahl
von instabilen periodischen Lösungen wurde kaum geklärt.

Um den Übergang besser aufzulösen, brauchen wir eine Abbildung,
wo die **|Steigung|** von **f(x)** nicht überall dieselbe ist:
wo es zugleich kontrahierende **und** expandierende Abschnitte gibt.

Dafür müssen wir etwas zurück...



Stabilität von periodischen Lösungen: geometrischer Zugang

Rückkehrabbildung (Poincaré)

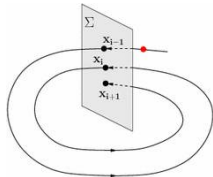


Abbildung überführt in sich die Koordinaten auf einer $(N-1)$ -dimensionalen Ebene.

Eine periodische Lösung (geschlossene Bahnkurve) im System mit kontinuierlicher Zeit liefert einen Fixpunkt von Poincaré-Abbildung.

Linearisierung von der Poincaré-Abbildung am Fixpunkt, der der periodischen Lösung entspricht: wir berechnen die $(N-1) \times (N-1)$ Jacobi-Matrix der Abbildung an diesem Punkt.

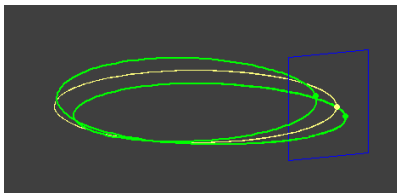
Periodische Lösung ist asymptotisch stabil, falls für alle Eigenwerte λ der Jacobi-Matrix am Fixpunkt der Poincaré-Abbildung gilt: $|\lambda| < 1$.

Periodische Lösung ist **asymptotisch stabil**,
falls für alle Eigenwerte λ der Jacobi-Matrix
am Fixpunkt der Poincaré-Abbildung gilt: $|\lambda| < 1$.

Sei **-1** Eigenwert von der Jacobi-Matrix.

Die Störung, die auf dem entsprechenden Eigenvektor liegt,
ändert ihr Vorzeichen nach **einem** Umlauf im Phasenraum.

Nach dem **zweiten** Umlauf, ändert sich das Vorzeichen wieder:
 $\Rightarrow$ ursprüngliche Störung wird wiederhergestellt.



So entsteht im Phasenraum eine Trajektorie, die sich
nach **zwei** Runden schließt und eine **verdoppelte** Periodendauer hat.

Die ursprüngliche periodische Lösung besteht weiterhin,
wird aber **instabil**.



Logistische Abbildung

(in Anlehnung an die Populationsdynamik)

Evolutionsregel mit diskreter Zeit: $z_{n+1} = a z_n - b z_n^2$;

nach Umskalierung $z = \frac{a}{b} x$ bleibt nur ein Parameter:

$$x_{n+1} = f(x_n) = a x_n (1 - x_n)$$

Intervall $(0, 1)$ wird bei $0 \leq a \leq 4$ in sich selbst abgebildet.

Fixpunkte: $x = 0$ und $x = 1 - 1/a$.

Multiplikator

$$f'(x) = a(1 - 2x): \quad \lambda = a \quad \text{bzw.} \quad \lambda = 2 - a.$$

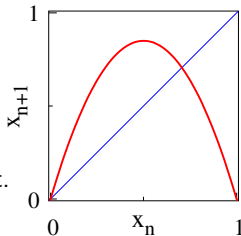
Stabil bei : $a < 1$ bzw. $1 < a < 3$.

Bei $a = 3$: **Periodenverdopplung** (Period: $1 \rightarrow 2$).

Attraktor: Sequenz $x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow \dots$

Bei $a = 1 + \sqrt{6} \approx 3.449$: **zweite Periodenverdopplung** (Period: $2 \rightarrow 4$).

Attraktor: Sequenz $x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow x_3 \rightarrow x_4 \rightarrow x_1 \rightarrow x_2 \dots$





Logistische Abbildung

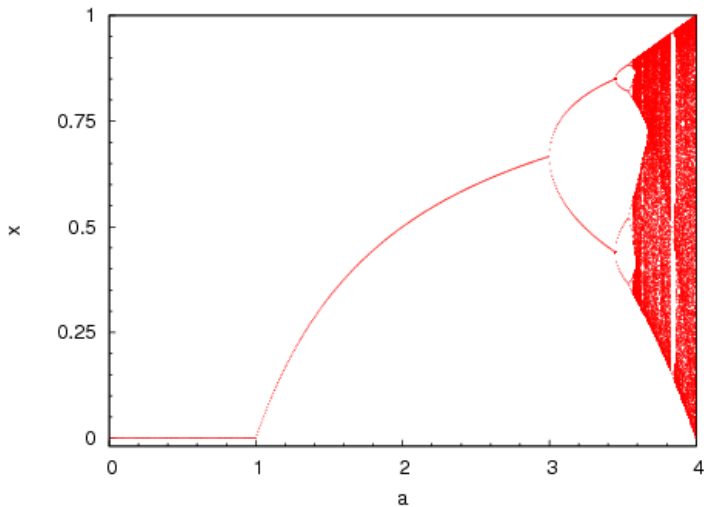
$$x_{n+1} = f(x_n) = a x_n (1 - x_n)$$

Berechnungsvorschrift für das Bifurkationsdiagramm

0. man nimmt den Anfangswert von a und wählt x_0 ($0 < x_0 < 1$) aus.
1. Die Abbildung wird 10^4 mal iteriert,
ohne graphische Darstellung von Ergebnissen:
die *Transiente* wird nicht angezeigt.
2. Die darauffolgenden 10^3 Iterationen von x_n werden geplottet.
3. Wert von a wird vergrößert: $a \rightarrow a + \varepsilon$.
Übergang zum Schritt 1.

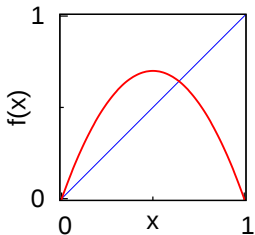


Bifurkationsdiagramm

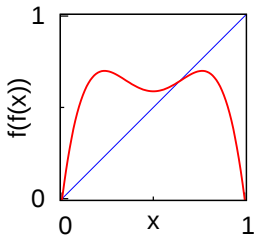




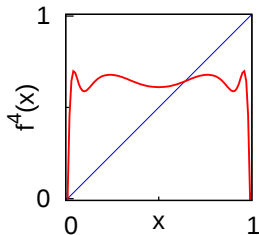
$$a=2.8$$



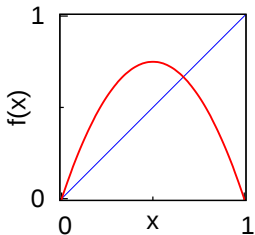
1. Rückkehr



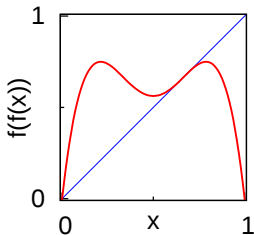
2. Rückkehr



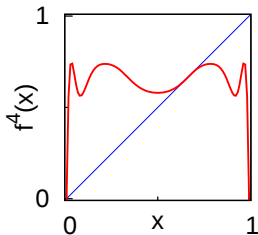
4. Rückkehr

 $a=3.0$ 

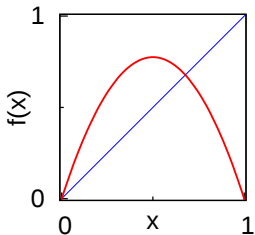
1. Rückkehr



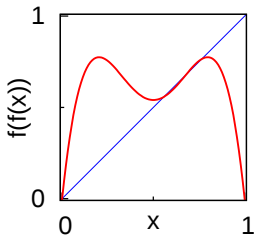
2. Rückkehr



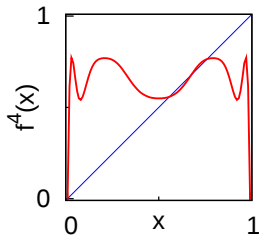
4. Rückkehr

 $a=3.1$ 

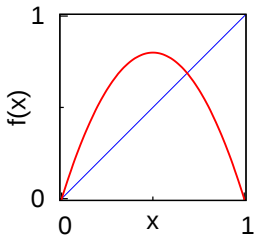
1. Rückkehr



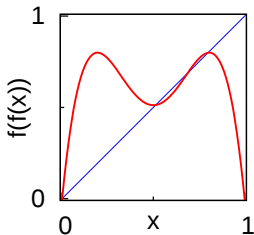
2. Rückkehr



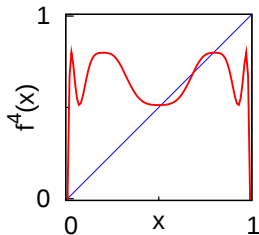
4. Rückkehr

 $a=3.2$ 

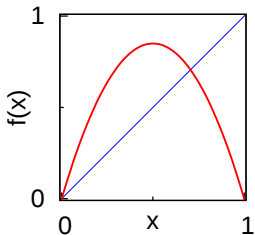
1. Rückkehr



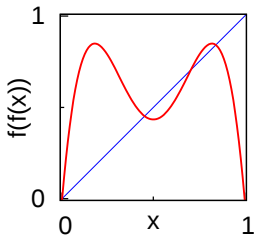
2. Rückkehr



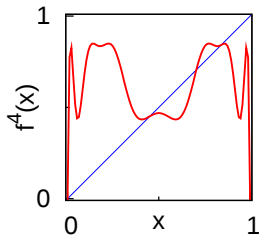
4. Rückkehr

 $a=3.4$ 

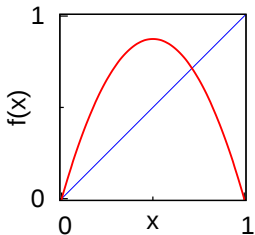
1. Rückkehr



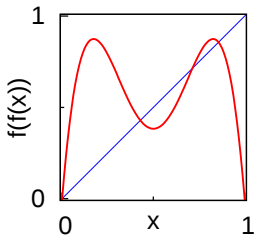
2. Rückkehr



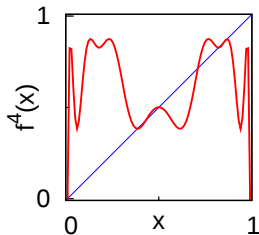
4. Rückkehr

 $a=3.5$ 

1. Rückkehr



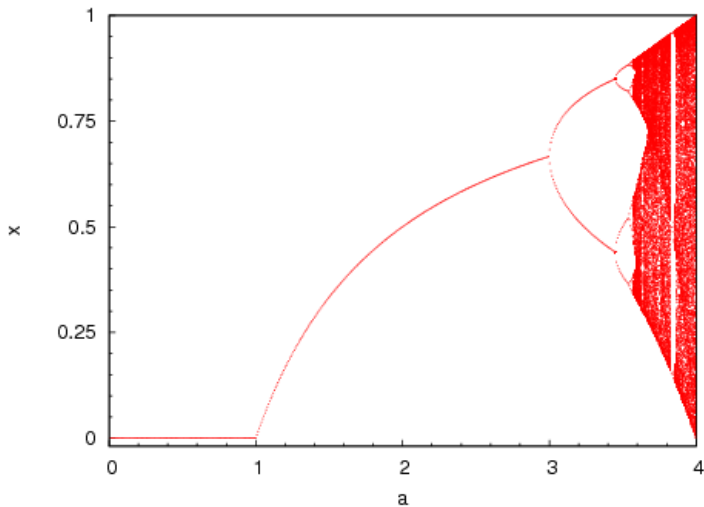
2. Rückkehr



4. Rückkehr

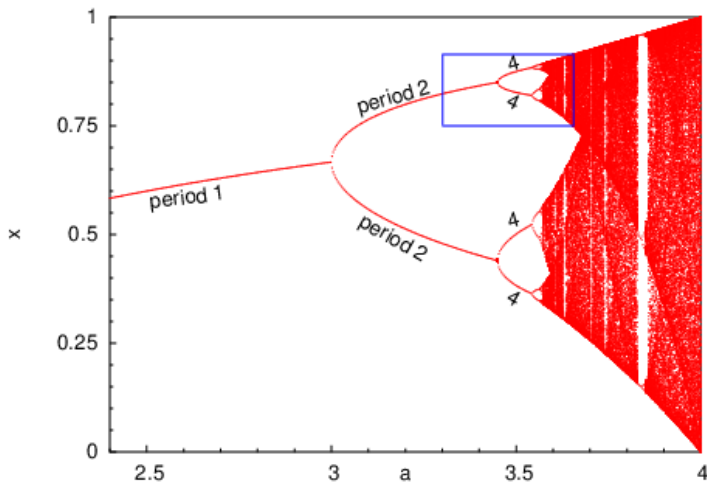


Bifurkationsdiagramm



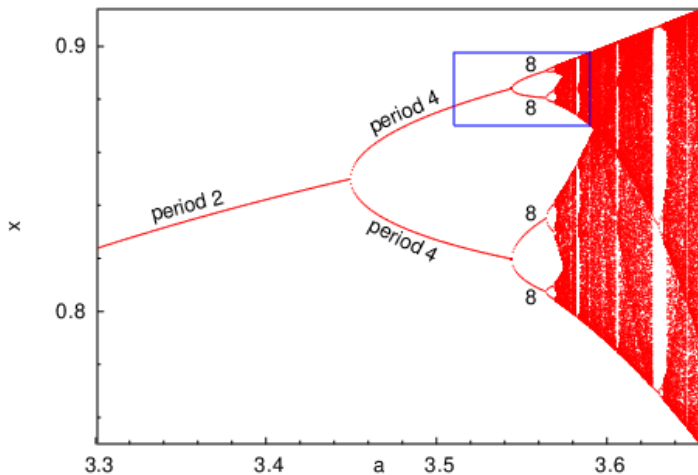


Bifurkationsdiagramm



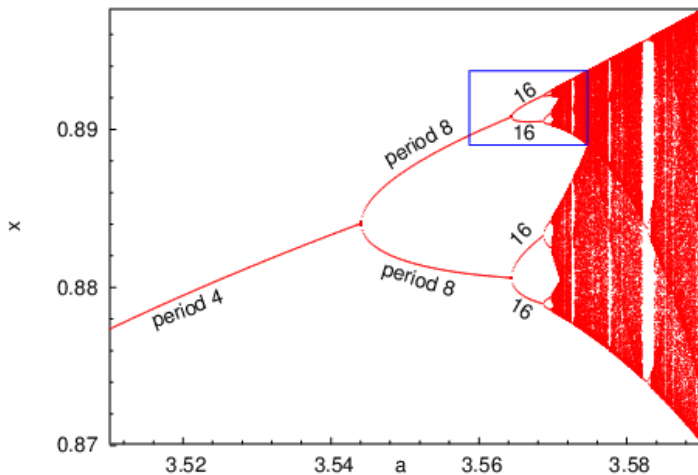


Bifurkationsdiagramm



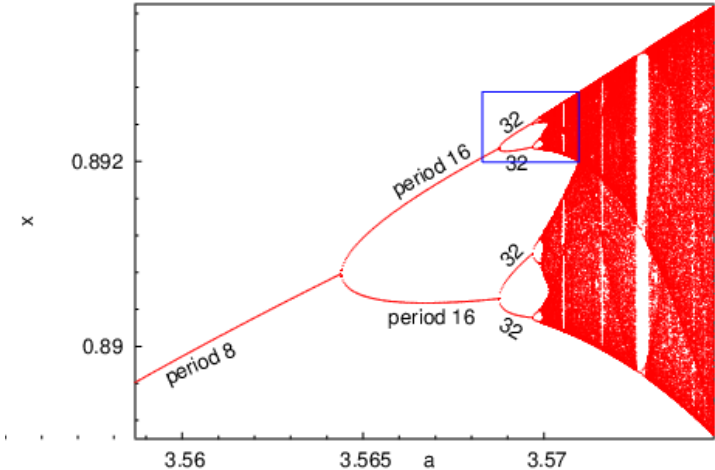


Bifurkationsdiagramm

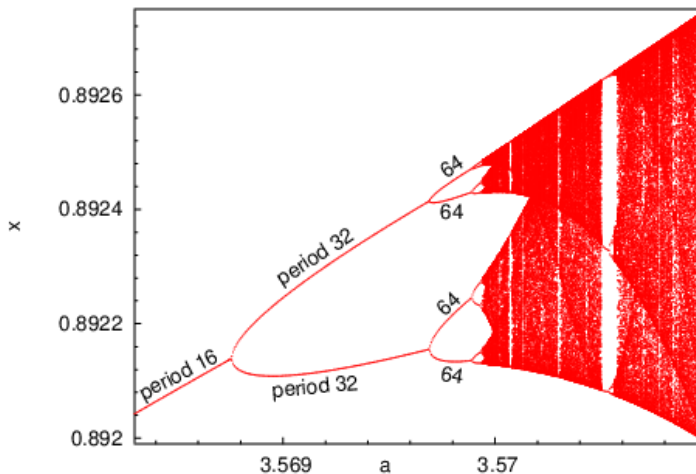




Bifurkationsdiagramm



Bifurkationsdiagramm





Metrische Eigenschaften von der Periodenverdopplungssequenz bei der logistischen Abbildung

- ▶ Wir bilden eine Zahlenfolge $\{a_n\}$ aus Bifurkationswerten von a :
 a_n markiert den Stabilitätsverlust von der Lösung mit Periode 2^n
und die Geburt von der Lösung mit Periode 2^{n+1} .
- ▶ $a_0=3$ und $a_1=1+\sqrt{6} \approx 3.449$ berechnet man explizit, die sonstigen
kriegt man mit Numerik. Die Folge $\{a_n\}$ konvergiert schnell;
bei $a > a_\infty=3.5699456\dots$ entsteht zum ersten mal Chaos.
- ▶ Bei $a = a_\infty : \forall n \exists$ ein instabiler periodischer Orbit mit Periode 2^n .
- ▶ Nächstes Objekt: Inkremente $\Delta_n = (a_{n+1} - a_n)$
und Quotienten $\delta_n = \frac{\Delta_n}{\Delta_{n+1}} = \frac{a_{n+1} - a_n}{a_{n+2} - a_{n+1}}$.
- ▶ Numerik ergibt: $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 4.669201\dots$
 $\implies$ Die Folge $\{a_n\}$ konvergiert asymptotisch exponentiell.



Qualitative Universalität vom Periodenverdopplungsszenario

Andere Familien von **unimodalen** Abbildungen eines Intervalls:

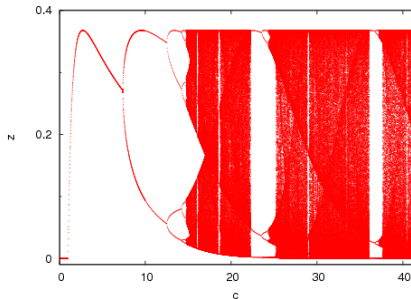
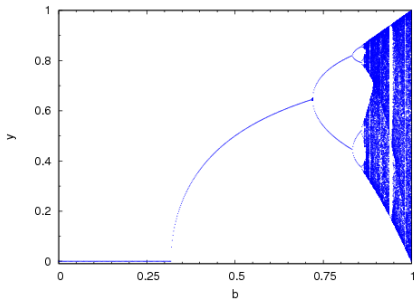
z.B.

$$y_{n+1} = b \sin(\pi y_n)$$

unimodal: mit einem Maximum

oder

$$z_{n+1} = c z_n \exp(-c z_n)$$



Quantitative Universalität vom Periodenverdopplungsszenario

Andere Familien von **unimodalen** Abbildungen eines Intervalls:

z.B. $y_{n+1} = b \sin(\pi y_n)$

oder $z_{n+1} = c z_n \exp(-cz_n)$

zeigen dieselbe Sequenz von Periodenverdopplungen,
aber Bifurkationswerte und die Inkremente Δ_n , ändern sich (*natürlich!*).

Die **Konvergenzgeschwindigkeit** ist jedoch dieselbe:

bei allen solchen Familien $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n \equiv \delta_F = 4.669201 \dots$

Diese **Universalität** wurde von Mitchell Feigenbaum
entdeckt und erklärt.

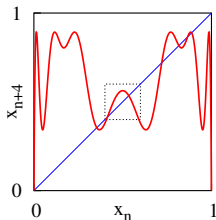
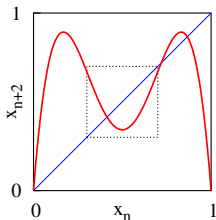
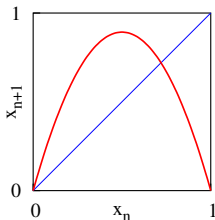


Grund: **Skaleninvarianz**.

Bestätigt in Familien von gewöhnlichen und partiellen DGL.,
Experimente: Lasers, Elektrochemie, Hydrodynamik, Magnetismus. . .



Skaleninvarianz



Mitte von jedem Bild sieht aus wie das *umgeklappte* vorherige Bild.

Neues Werkzeug: Renormierungsformalismus (*renormalization group*)

Transformation im Funktionenraum (nach Verschiebung: $x \rightarrow x - 1/2$)

Verdopplungsoperator **T**:

$$f_{j+1}(x) = \mathbf{T} f_j(x) = \alpha f_j \left(f_j \left(\frac{x}{\alpha} \right) \right) \quad \text{mit } \alpha < 0$$

Funktionenraum: glatte Funktionen mit dem *quadratischen* Extremum.



Skaleninvarianz

Verdopplungsoperator $\mathbf{T}$: $f_{j+1}(x) = \mathbf{T} f_j(x) = \alpha f_j \left(f_j \left(\frac{x}{\alpha} \right) \right)$

- ▷ Sei $x = \bar{x}$ ein periodischer Punkt von $f(x)$ mit Periode $2p$:

$$f^{2p}(\bar{x}) = \underbrace{f(f(f \dots f(x) \dots))}_{2p} = \bar{x},$$

dann ist $x = \alpha \bar{x}$ ein periodischer Punkt von $\mathbf{T}f(x)$ mit Periode p :

$$(\mathbf{T}f)^p(\alpha \bar{x}) = \left(\alpha f f \left(\frac{1}{\alpha} \right) \right)^p (\alpha \bar{x}) = \alpha f^{2p}(\bar{x}) = \alpha \bar{x}$$

Multiplikator dieser periodischen Lösung bleibt konstant unter $\mathbf{T}$:

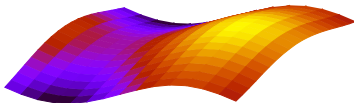
$$(\text{Kettenregel}) \quad \frac{d^p}{dx^p} (\mathbf{T}f)^p(\alpha \bar{x}) = \frac{d^{2p}}{dx^{2p}} f^{2p}(\bar{x})$$

$\Rightarrow$ Operator überführt eine Funktion am krit. Parameterwert $2p \rightarrow 4p$
in eine andere Funktion am krit. Parameterwert $p \rightarrow 2p$.



Skaleninvarianz

Gesamtheit aller Funktionen mit einem periodischen Orbit von Periode **1**
und mit Multiplikator **-1**
bildet im Raum **aller** Funktionen eine Untermenge:
eine Oberfläche (Mannigfaltigkeit) M_1 der **Kodimension 1**.

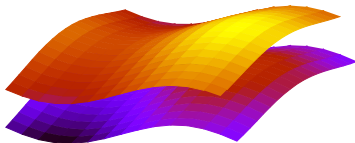


Eine ähnliche Mannigfaltigkeit M_p der Kodimension **1**
entspricht **jeder** Periodenverdopplungsbifurkation $p \rightarrow 2p$.



Skaleninvarianz

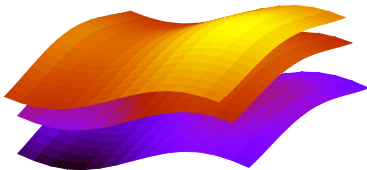
Gesamtheit aller Funktionen mit einem periodischen Orbit von Periode **1**
und mit Multiplikator **-1**
bildet im Raum **aller** Funktionen eine Untermenge:
eine Oberfläche (Mannigfaltigkeit) M_1 der **Kodimension 1**.



Eine ähnliche Mannigfaltigkeit M_p der Kodimension 1
entspricht jeder Periodenverdopplungsbifurkation $p \rightarrow 2p$.

Skaleninvarianz

Gesamtheit aller Funktionen mit einem periodischen Orbit von Periode **1**
 und mit Multiplikator **-1**
 bildet im Raum **aller** Funktionen eine Untermenge:
 eine Oberfläche (Mannigfaltigkeit) M_1 der **Kodimension 1**.



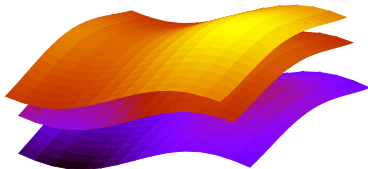
Eine ähnliche Mannigfaltigkeit M_p der Kodimension 1
 entspricht jeder Periodenverdopplungsbifurkation $p \rightarrow 2p$.

Diese Flächen bilden zusammen eine konvergierende Familie $\{M_p\}$;
 die Grenzfläche M_∞ entspricht dem Übergang ins Chaos
 und der Existenz von instabilen Orbits mit Perioden 2^n , $n = 0, 1, \dots, \infty$.



Skaleninvarianz

Gesamtheit aller Funktionen mit einem periodischen Orbit von Periode **1**
und mit Multiplikator **-1**
bildet im Raum **aller** Funktionen eine Untermenge:
eine Oberfläche (Mannigfaltigkeit) M_1 der **Kodimension 1**.



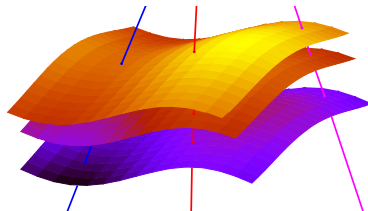
Verdopplungsoperator **T** überführt jede Fläche M_{2p} in die M_p .
Die Grenzfläche M_∞ ist **T-invariant**.

Parameterabhängige Familien von Abbildungen,
wie $f(x) = ax(1-x)$, $f(x) = b\sin(\pi x)$ usw.,
bilden in diesem Raum eindimensionale Kurven,
die alle Flächen aus $\{M_p\}$ (einschließlich M_∞) „durchbohren“.



Skaleninvarianz

Gesamtheit aller Funktionen mit einem periodischen Orbit von Periode **1**
und mit Multiplikator **-1**
bildet im Raum **aller** Funktionen eine Untermenge:
eine Oberfläche (Mannigfaltigkeit) M_1 der **Kodimension 1**.



Verdopplungsoperator **T** überführt jede Fläche M_{2^p} in die M_p .
Die Grenzfläche M_∞ ist **T-invariant**.

Parameterabhängige Familien von Abbildungen,
wie $f(x) = ax(1-x)$, $f(x) = b\sin(\pi x)$ usw.,
bilden in diesem Raum eindimensionale Kurven,
die alle Flächen aus $\{M_p\}$ (einschließlich M_∞) „durchbohren“.



Skaleninvarianz

Fixpunkt des Operators T : Funktion $g(x)$ mit

$$Tg(x) = g(x) \quad \Rightarrow \quad g(x) = \alpha g\left(g\left(\frac{x}{\alpha}\right)\right)$$

Im Funktionenraum liegt der Fixpunkt $g(x)$ an der Fläche M_∞ .

Numerische Lösung der Funktionsgleichung ergibt

$$g(x) = 1 - 1.52763x^2 + 0.104815x^4 + 0.0267057x^6 + \dots$$

mit $\alpha = -2.5029875 \dots \Rightarrow$ Selbstähnlichkeit im x -Raum.

Stabilitätsanalyse vom Fixpunkt $g(x)$:

Alle Eigenwerte der Linearisierung von T an $g(x)$,
bis auf einen, liegen im inneren des Einheitskreises.

Der einzige Eigenwert,

der der instabilen Richtung im Funktionenraum entspricht,

ist $4.669201 \dots = \delta_F \Rightarrow$ Selbstähnlichkeit im Parameterraum.