

Vorlesung 18

# Quasiperiodizität. Kollektive Effekte. Synchronisation.





## Stabilität von periodischen Lösungen: geometrischer Zugang

### Rückkehrabbildung (Poincaré)

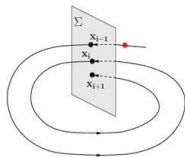


Abbildung überführt in sich die Koordinaten auf einer  $(N-1)$ -dimensionalen Ebene.

Eine periodische Lösung (geschlossene Bahnkurve) im System mit kontinuierlicher Zeit liefert einen Fixpunkt von Poincaré-Abbildung.

Linearisierung von der Poincaré-Abbildung am Fixpunkt, der der periodischen Lösung entspricht: wir berechnen die  $(N-1) \times (N-1)$  Jacobi-Matrix der Abbildung an diesem Punkt.

Periodische Lösung ist asymptotisch stabil, falls für alle Eigenwerte  $\lambda$  der Jacobi-Matrix gilt:  $|\lambda| < 1$ .



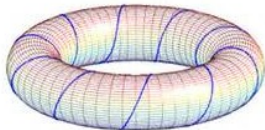
Sei  $e^{\pm i\theta}$  Eigenwert von der Jacobi-Matrix.

Die entsprechende neutrale Störung wird nach einem Umlauf weder größer noch kleiner, aber sie dreht sich um den Winkel  $\theta$ .

So entsteht auf der Poincaré-Ebene ein invarianter Kreis;  
falls  $\theta = 2\pi m/n$ , schließt sich die Trajektorie  
nach  $n$  Iterationen (und  $m$  Umdrehungen)  
sonst bedeckt sie den ganzen Kreis dicht.

Einer invarianten Kurve auf der Poincaré-Ebene  
entspricht im Phasenraum eine schlauchartige Oberfläche:  
ein **zwei-dimensionaler Torus**.

Geburt von einem Torus aus einem Grenzyklus  
wird **Neimark-Sacker-Bifurkation** genannt.



## Quasiperiodische Schwingungen

- ▷ Dynamik **auf dem** entstandenen Torus wird durch die Rückkehr-Abbildung wiedergegeben: sie bildet die geschlossene invariante Kurve in der Poincaré-Ebene in sich selbst ab.  
Es ist bequem diese Kurve z.B. durch eine Winkelkoordinate ( $\varphi$ ) zu parametrieren. Die Rückkehr-Abbildung ist dann  $\varphi_{n+1} = \Phi(\varphi_n)$ .
- ▷ Gleich nach der **Neimark-Sacker-Bifurkation** gilt einfach  $\varphi_{n+1} = \varphi_n + \theta$ . Fernab der Torus-Geburt wird eindimensionale Abbildung stark nichtlinear.
- ▷ Bevor wir uns damit auseinandersetzen, erweitern wir den Kontext:





- ▷ Unter **Synchronisation** versteht man **Anpassung von Rhythmen** von oszillierenden Objekten, in Folge deren (schwacher) Wechselwirkung.
- ▷ Synchronisation gehört zu den verbreitetsten **kollektiven** dynamischen Effekten; zahlreiche Beispiele aus der Natur und Technik füllen Bücher und Zeitschriften.
- ▷ Es gibt unterschiedliche Typen von Synchronisation:

- a) (*einseitige*) Synchronization mit dem externen Signal.  
Eine rhythmische Kraft wirkt auf einen oder auf mehrere Oszillatoren.  
Rückwirkung auf die Kraft seitens dieser Oszillatoren gibt es nicht, oder sie ist vernachlässigbar.

Beispiel:  $\frac{dx}{dt} = F(x, \dot{x}) + A \cos \omega t$

wo schon  $F(x, \dot{x})$  alleine die Schwingungen hervorruft, deren Frequenz sich im allgemeinen von  $\omega$  unterscheidet.

Alle lebende Organismen passen sich dem Tagesrhythmus an.

Die meisten Organismen passen sich dem Jahresrhythmus an.

... Gezeiten und andere sich wiederholende physikalische Prozessen...



- ▶ Unter **Synchronisation** versteht man **Anpassung von Rhythmen** von oszillierenden Objekten in Folge deren (schwacher) Wechselwirkung.
- ▶ Synchronisation gehört zu den verbreitetsten **kollektiven** dynamischen Effekten; zahlreiche Beispiele aus der Natur und Technik füllen Bücher und Zeitschriften.
- ▶ Es gibt unterschiedliche Typen von Synchronisation:

b) gegenseitige Synchronisation (**mutual Synchronisation**):

Jeder Element in Ensemble aus  $N \geq 2$  gekoppelten Oszillatoren wirkt auf jeden (oder manche) anderen Elementen.

Untereinander können die Oszillatoren sowohl identisch wie auch unterschiedlich sein. Unter der Einfluss von Kopplung entwickelt sich eine kollektive periodische Schwingung mit der gemeinsamen Frequenz,

... oder eine *chaotische* Schwingung, in welcher jedes Element aperiodisch und unvorhersagbar schwingt, aber die zeitlichen Abstände zwischen Maxima und Minima von Observablen gut korreliert sind.

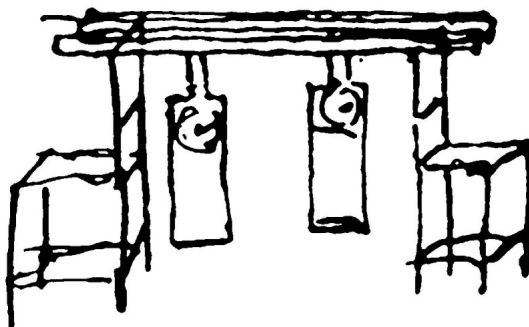
## Synchronisation

- ▶ Erste Beschreibung: Christiaan Huygens



## Synchronisation

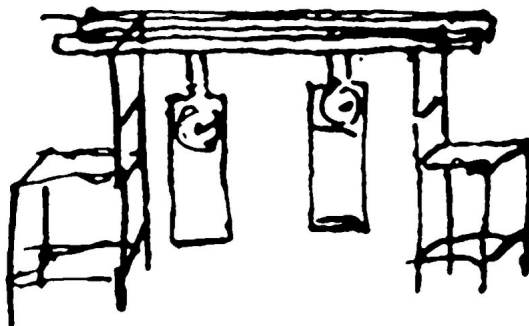
- Erste Beschreibung: Christiaan Huygens, zwei Pendeluhren



*Les vibrations des Pendules,  
lors qu'elles sont mises à la consonance,  
ne vont pas en sorte que l'une soit parallele à l'autre;  
ils s'approchent & s'écartent par des mouvemens contraires.*

## Synchronisation

- Erste Beschreibung: Christiaan Huygens, zwei Pendeluhren



*Schwingungen der Pendel, wenn sie in Einklang gebracht werden, laufen nicht so ab, dass das eine parallel zum anderen ist, aber im Gegenteil: sie nähern sich und trennen sich durch gegensätzliche Bewegungen.*

- ▶ Jeder periodische Schwingungsprozess kann in die **Amplitude** und die **Phase** zerlegt werden.

$$x(t) = A \sin \left( \underbrace{\frac{2\pi t}{T} + \phi_0}_{\text{als kanonisches Beispiel:}} \right)$$

Dimensionslose **Phase**  $\varphi$  parametrisiert Bewegung entlang des Grenzzyklus, und **Amplitude**  $A$  charakterisiert Intensität der Schwingungen.

- ▶ Die Phase kann **immer** so definiert werden, dass ihre zeitliche Evolution gleichmäßig wird:  $\frac{d\varphi}{dt} = \omega_0$   
( $\omega_0$  – **natürliche Frequenz** des Systems).

- ▶ Aus der Sicht der Stabilität ist die Phase **neutral**: deren Störungen **weder wachsen noch abklingen** (Invarianz eines autonomen Systems bezüglich der Zeitverschiebung).  
⇒ Eine **schwache** Einwirkung (äußere Kraft, Wechselwirkung mit anderen Oszillatoren) kann **große** Auslenkungen der Phase verursachen, wobei die Amplitude praktisch unverändert bleibt.
- ▶ Auf diese Weise werden die Rhythmen von Oszillatoren schon bei einer schwachen Wechselwirkung aneinander angepasst: ⇒ **Synchronisation**.



## Synchronisation durch eine externe periodische Einwirkung

- ▷ *Stroboskopische Abbildung* der Phase **nach einer Periode** der äußeren Kraft:

$$\varphi_{n+1} = \varphi_n + \underbrace{\Phi(\varphi_n)}_{\text{Verschiebung, Drehung}}, \quad \Phi(\xi) = \Phi(\xi + 1) \Rightarrow \text{Kreisabbildung, circle map}$$

Verschiebung, Drehung

Abhängigkeit  $\Phi(\varphi)$  ist **periodisch**; wir skalieren deren Periode auf 1.

Fourier-Zerlegung: 
$$\Phi(\varphi) = \sum_{j=0}^{\infty} (\alpha_j \cos(2\pi j \varphi) + \beta_j \sin(2\pi j \varphi))$$

- ▷ Einfachste, aber durchaus representative Variante:

a) nur die 0. und 1. Fourier-Komponenten belassen:  $\alpha_j = \beta_j = 0 \quad \forall j > 1$ .

b) die Wahl des Nullpunktes von  $\varphi$ : so, dass  $\alpha_1 = 0$ .

Es bleiben nur noch  $\alpha_0$  und  $\beta_1$ .

Nach Umbenennung  $\alpha_0 \rightarrow \Omega$  und Umskalierung  $K = -2\pi\beta_1$  entsteht

die **sine-mapping**

$$\varphi_{n+1} = \varphi_n + \Omega - \frac{K}{2\pi} \sin(2\pi\varphi_n)$$

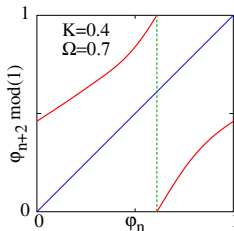
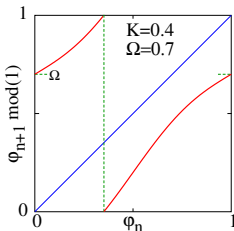
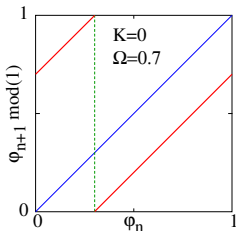
$\Omega$ : allgemeine ( $\varphi$ -unabhängige) Komponente der Verschiebung pro Periode

$K$ : Nichlinearitätsstärke.



$$\varphi_{n+1} = \varphi_n + \Omega - \frac{K}{2\pi} \sin(2\pi\varphi_n)$$

- ▷  $\Omega$ : allgemeine ( $\varphi$ -unabhängige) Komponente der Verschiebung pro Periode
- ▷  $K$ : Nichtlinearitätsstärke; bei  $K=0$  bleibt gleichmäßige Verschiebung von  $\varphi$   
 $\varphi_{n+1} = \varphi_n + \Omega$ .
- ▷  $\frac{\partial \varphi_{n+1}}{\partial \varphi_n} = 1 - K \cos(2\pi\varphi_n) \Rightarrow$  bei  $K < 1$  ist die Abbildung monoton (wachsend).
- ▷ Die Variable der Abbildung (Phase  $\varphi$ ) ist periodisch mit Periode 1.  
Deswegen plottet man meist nicht  $\varphi_{n+1}$  vs.  $\varphi_n$ , sondern  $(\varphi_{n+1} \bmod 1)$  vs.  $\varphi_n$ .

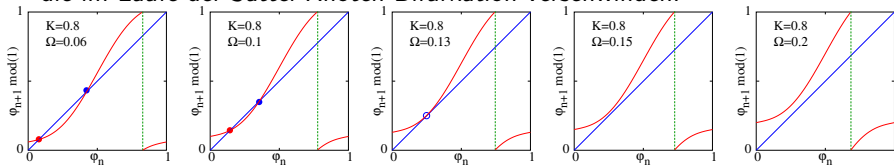




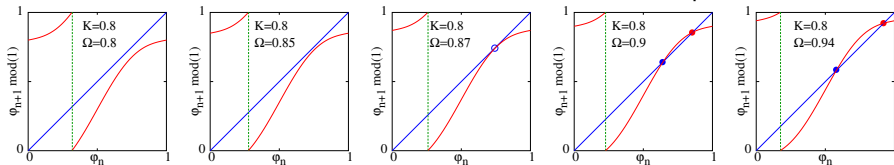
$$\varphi_{n+1} = \varphi_n + \Omega - \frac{K}{2\pi} \sin(2\pi\varphi_n)$$

Wir fixieren zunächst den Wert von  $K$  und vergrößern  $\Omega$  von 0 bis 1.

Bei relativ kleinen Werten von  $\Omega$  gibt es zwei Fixpunkte der Abbildung, die im Laufe der Sattel-Knoten Bifurkation verschwinden:



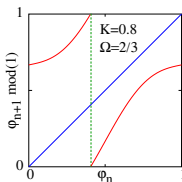
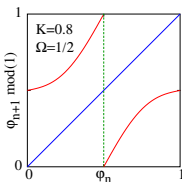
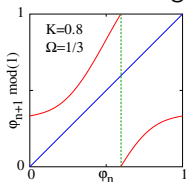
Bei relativ großen Werten von  $\Omega$  entstehen in einer Sattel-Knoten Bifurkation zwei neue Fixpunkte:



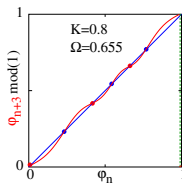
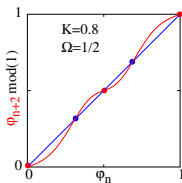
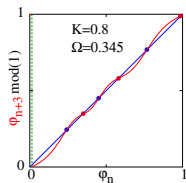


$$\varphi_{n+1} = \varphi_n + \Omega - \frac{K}{2\pi} \sin(2\pi\varphi_n)$$

Bei “mäßigen” Werten von  $\Omega$   
besitzt die Abbildung offensichtlich **keine** Fixpunkte:



Dafür aber gibt es in diesem Bereich **Intervalle** von  $\Omega$   
mit **periodischen Trajektorien** von unterschiedlichen Periodenlängen:





$$\varphi_{n+1} = \varphi_n + \Omega - \frac{K}{2\pi} \sin(2\pi\varphi_n)$$

- ▷ Charakteristik einer Kreisabbildung, die deren Dynamik bestimmt, ist **mittlere** Phasenänderung pro Periode (der externen Kraft):

$$\text{Grenzwert } \rho(\Omega, K, \varphi_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\varphi_n - \varphi_0}{n}$$

wird **Windungszahl** (winding number, rotation number) genannt.

- ▷ Bei  $K \leq 1$  bleibt die Windungszahl vom Anfangspunkt  $\varphi_0$  unabhängig:

$$\rho(\Omega, K, \varphi_0) = \rho(\Omega, K).$$

- ▷ *Folge*: alle Trajektorien haben **dieselbe** Windungszahl

⇒ zwei periodische Trajektorien mit **unterschiedlichen** Periodenlängen können (bei gegebenen  $\Omega$  und  $K$ ) **nicht** koexistieren.

- ▷ Bei jeder **rationalen** Windungszahl  $\rho = M/N$  existieren **stabile** periodische Trajektorien mit Länge  $N$ .
- ▷ Bei jeder **irrationalen** Windungszahl  $\rho$  gibt es **keine** geschlossene Trajektorien. Für einen beliebigen Anfangspunkt  $\varphi_0$  ist die unendliche Sequenz  $\{\varphi_j\}$ ,  $j = 1, \dots$ , **überall dicht** auf dem Intervall  $(0, 1)$ .  
Dynamik unter irrationalen  $\rho$  wird **quasiperiodisch** genannt.



$$\varphi_{n+1} = \varphi_n + \Omega - \frac{K}{2\pi} \sin(2\pi\varphi_n)$$

*Zur Erinnerung:* dieses Dynamisches System mit diskreter Zeit  $n$  ist entstanden als stroboskopische Abbildung der Phase nach **einer** Periode der äußeren Kraft.

- ▶ Bei jeder **rationalen** Windungszahl  $\rho = M/N$  existieren **stabile** periodische Trajektorien der Abbildung mit Länge  $N$ . Im ursprünglichen System (mit kontinuierlicher Zeit) entsprechen diese Trajektorien den Grenzyklen. Dadurch wird die Periodendauer  $T$  der Schwingung am Grenzyklus ein **mehrfaches** der Periode  $T_{\text{ext}}$  der äußeren Kraft:  $T = N T_{\text{ext}}$ : das System passt sich dem Rhythmus der periodischen externen Kraft an, **synchronisiert** sich mit der Kraft.
- ▶ Ein Grenzyklus ist **structurally stable**: beim genügend kleinen Änderungen von Parametern (in unserem Fall  $\Omega$  und  $K$ ) bleibt es bestehen und verliert seine Stabilität nicht.
- ▶ Dementsprechend **robust** ist auch der physikalische Zustand einer Synchronisation zwischen den zwei (oder mehr) periodischen Oszillatoren.
- ▶ Besonders robust sind synchronisierte Zustände mit kleinen Werten von  $N$ , und unter diesen tut sich der Fall  $N = 1$  hervor:  $T = T_{\text{ext}}$



$$\varphi_{n+1} = \varphi_n + \Omega - \frac{K}{2\pi} \sin(2\pi\varphi_n)$$

Bei  $K = 0$ : mittlere Drehung  $\rho = \Omega$ ;  $\Rightarrow$  auf einem Intervall von  $\Omega$  wechseln sich die rationalen und die irrationalen Werte von  $\rho$  ab.

Da die rationalen Windungszahlen eine abzählbare Menge bilden, während die irrationalen ein Kontinuum ausfüllen, sind bei  $K=0$  synchronisierte Zustände eine Ausnahme.

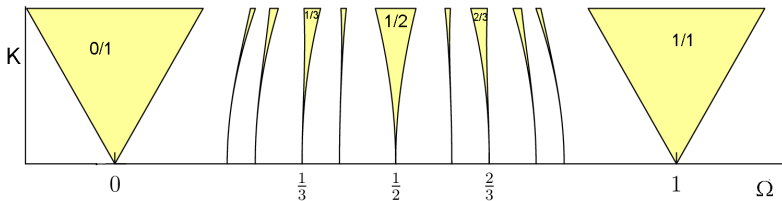
Dieselbe Abwechslung findet sich bei allen Werten von  $K$  zwischen 0 und 1. Jedoch beim festen  $K \neq 0$  sind die Grenzzyklen strukturell stabil, daher entspricht jedem rationalen Wert von  $\rho$  ein Intervall von  $\Omega$ -Werten.

Mit Wachstum vom  $K$  wird dieses Intervall immer breiter (aber ohne Überlappung, wegen Eindeutigkeit der Windungszahl  $\rho$ ). Damit wächst auch die Chance, beim zufälligen Auswahl von  $\Omega$  einen synchronisierten Zustand zu erwischen.

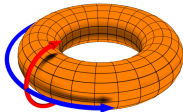
Hingegen, Gesamtlänge von der Restmenge (Menge von  $\Omega$ -Werten, die den irrationalen Windungszahlen entsprechen) nimmt mit wachsendem  $K$  ab.



$$\varphi_{n+1} = \varphi_n + \Omega - \frac{K}{2\pi} \sin(2\pi\varphi_n)$$



- ▷ Bereiche mit rationalen Werten von  $\rho$  heißen Arnold-Zungen / Arnold tongues (nach Vladimir I. Arnold)
- ▷ Zwischen den Zungen liegen die Kurven mit irrationalen Werten von  $\rho$ .

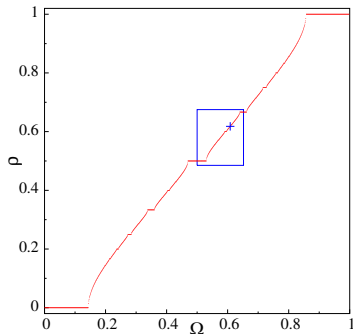




$$\varphi_{n+1} = \varphi_n + \Omega - \frac{K}{2\pi} \sin(2\pi\varphi_n)$$

Im inneren einer Zunge mit Windungszahl  $\rho = M/N$  gibt es je **eine stabile** und **eine instabile** periodische Lösung mit Periode  $N$ . Beide Lösungen sind strukturell stabil. An den Zungenrändern stoßen sie aufeinander und verschwinden (*Sattel-Knoten-Bif. periodischer Lösungen*).

Abhängigkeit  $\rho(\Omega)$  bei einem konstanten  $K < 1$ :



$\rho(\Omega)$  ist eine **stückweise konstante** **monoton steigende** Funktion.

Jedem **rationalen** Funktionswert entspricht eine **waagerechte** Stufe.

Gesamtanzahl von Stufen: unendlich.

Die Funktion  $\rho(\Omega)$  ist **stetig**, aber **nicht differenzierbar**.

Umso **größer** der Nenner  $N$  von  $\rho$ , desto **kürzer** die Stufe.

Bei  $K < 1$ : **Gesamtlänge** aller Stufen  $< 1$ .

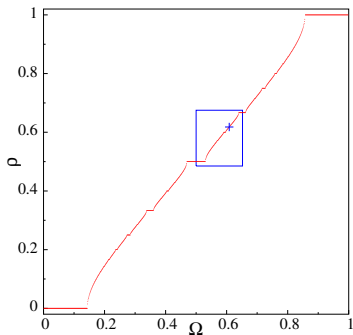
$\Rightarrow$  Der Rest ("Zwischenräume"):  
Punkte mit irrationalen Werten von  $\rho$ .



$$\varphi_{n+1} = \varphi_n + \Omega - \frac{K}{2\pi} \sin(2\pi\varphi_n)$$

Im inneren einer Zunge mit Windungszahl  $\rho = M/N$  gibt es je **eine stabile** und **eine instabile** periodische Lösung mit Periode  $n$ . Beide Lösungen sind strukturell stabil. An den Zungenrändern stoßen sie aufeinander und verschwinden (*Sattel-Knoten-Bif. periodischer Lösungen*).

Abhängigkeit  $\rho(\Omega)$  bei einem konstanten  $K < 1$ :



$\rho(\Omega)$  ist eine **stückweise konstante** **monoton steigende** Funktion.

Jedem **rationalen** Funktionswert entspricht eine **waagerechte** Stufe.

Gesamtanzahl von Stufen: unendlich.

Die Funktion  $\rho(\Omega)$  ist **stetig**, aber **nicht differenzierbar**.

Umso **größer** der Nenner  $N$  von  $\rho$ , desto **kürzer** die Stufe.

Teufelstreppe ist **selbst-ähnlich**:

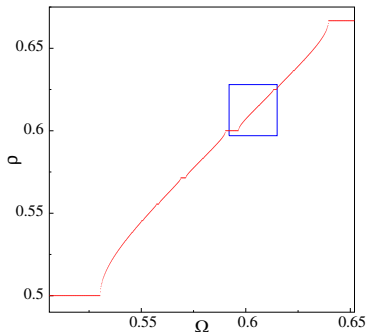
Vergrößerung um einen **irrationalen** Punkt wiedergibt dieselbe Struktur.



$$\varphi_{n+1} = \varphi_n + \Omega - \frac{K}{2\pi} \sin(2\pi\varphi_n)$$

Im inneren einer Zunge mit Windungszahl  $\rho = M/N$  gibt es je **eine stabile** und **eine instabile** periodische Lösung mit Periode  $N$ . Beide Lösungen sind strukturell stabil. An den Zungenrändern stoßen sie aufeinander und verschwinden (*Sattel-Knoten-Bif. periodischer Lösungen*).

Abhängigkeit  $\rho(\Omega)$  bei einem konstanten  $K < 1$ :



$\rho(\Omega)$  ist eine **stückweise konstante** **monoton steigende** Funktion.

Jedem **rationalen** Funktionswert entspricht eine **waagerechte** Stufe.

Gesamtanzahl von Stufen: unendlich.

Die Funktion  $\rho(\Omega)$  ist **stetig**, aber **nicht differenzierbar**.

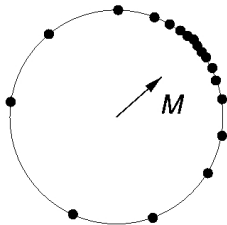
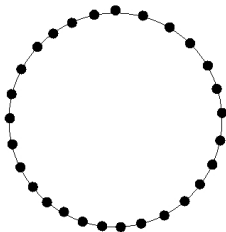
Umso **größer** der Nenner  $N$  von  $\rho$ , desto **kürzer** die Stufe.

Teufelstreppe ist **selbst-ähnlich**:

Vergrößerung um einen **irrationalen** Punkt wiedergibt dieselbe Struktur.

## Synchronisation in einem Ensemble aus $N$ Oszillatoren

- ▷ Wir verbinden miteinander  $N$  ( $N \geq 2$ ) Oszillatoren mit **unterschiedlichen** individuellen Frequenzen.
- ▷ Bei einer hinreichend starken Kopplung werden manche Phasen gemeinsam wachsen. Umso stärker die Kopplung, desto mehr Elemente bevölkern den „**synchronisierten Cluster**“.





## Synchronisation in einem Ensemble aus $N$ Oszillatoren

Bei einer moderaten Wechselwirkung können die Amplitudenänderungen vernachlässigt werden. Dynamik reduziert sich auf zeitliche Änderungen von Phasen  $\varphi_i$ :

$$\frac{d\varphi_i}{dt} = \omega_i + \sum_j^N G_j(\varphi_i, \varphi_j)$$

Reduktion zu Phasendifferenzen: **Kuramoto-Modell**

$$\frac{d\varphi_i}{dt} = \omega_i + \sum_j^N F_j(\varphi_j - \varphi_i), \quad F_j(\xi) = F_j(\xi + 2\pi)$$

Periodizität der Wechselwirkung

$$\Rightarrow \frac{d\varphi_i}{dt} = \omega_i + \frac{K}{N} \sum_j^N \sin(\varphi_j - \varphi_i)$$

## Chaotische Phasensynchronisation

Nun verbinden wir miteinander  $N$  ( $N \geq 2$ ) Oszillatoren, von denen jeder einzelne eine **chaotische** Bewegung ausführt (z.B., Lorenz-Systeme).

Auch die chaotischen Schwingungen lassen sich oft in die Phase und Amplitude zerlegen.

Bei der moderaten Kopplungsstärke werden die Phasen von Oszillatoren **synchronisiert** (die werden zwar nicht **identisch**, aber deren Differenz **lokalisiert sich** in einem kleinen Intervall), währenddessen die **Amplituden unkorreliert** bleiben.

*Zwei gekoppelte chaotische **Rössler**-Systeme:*

