

Vorlesung 3.

Ein- und zweidimensionale Dynamik



**Eindimensionale Dynamik: $\dot{x} = f(x, \mu)$.**

- ▶ Phasenraum: Linie (offen oder geschlossen, z.B. ein Kreis).
Beispiele: $\dot{x} = x^2 - 3x + 4$, $\dot{x} = 1 + \cos x$.
Parameterabhängig: $\dot{x} = x^2 - 3\mu_1 x + 4\mu_2^2$, $\dot{x} = \mu + \cos x$.
- ▶ Auf der endlosen Linie bleibt die rigide Zahlenordnung (*groß liegt rechts vom klein*) erhalten:
aus $x(t_0) < y(t_0)$ folgt $\forall t > t_0 : x(t) < y(t)$.
Es herrscht ein komplettes Überholungsverbot.
- ▶ Im Fall der geschlossenen Linie hat zwar die Zahlenordnung keinen Sinn, aber eine Überholung bleibt weiterhin verboten.
- ▶ Formell ist die Gleichung integrierbar: $t = \int \frac{dx}{f(x)}$,
aber wir haben andere Interessen.
- ▶ Betrachten wir die Kurve $f(x, \mu)$.

Eindimensionale Dynamik: $\dot{x} = f(x, \mu)$.

Betrachten wir die Kurve $f(x, \mu)$.

- ▷ Nullstellen dieser **stetigen** Funktion sind Ruhelagen (Gleichgewichte) des dynamischen Systems.

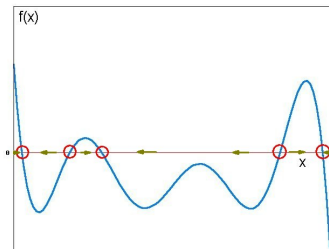
- ▷ Auf den Abschnitten mit positiver $f(x)$ wächst der Wert von $x(t)$.

Auf den Abschnitten mit negativer $f(x)$ nimmt der Wert von $x(t)$ ab.

- ▷ „Eindimensionale Jacobi-Matrix“: Wert von $\partial f / \partial x$ an der Nullstelle.

Nullstellen (Gleichgewichte) mit $\partial f / \partial x > 0$ sind instabil.

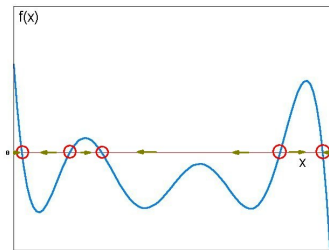
Nullstellen (Gleichgewichte) mit $\partial f / \partial x < 0$ sind asymptotisch stabil.



Eindimensionale Dynamik: $\dot{x} = f(x, \mu)$.

Betrachten wir die Kurve $f(x, \mu)$.

- ▷ Nullstellen dieser **stetigen** Funktion sind Ruhelagen (Gleichgewichte) des dynamischen Systems.



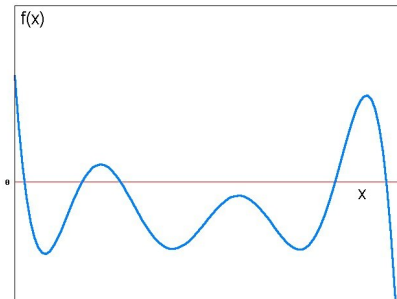
- ▷ Auf den Abschnitten mit positiver $f(x)$ wächst der Wert von $x(t)$.
Auf den Abschnitten mit negativer $f(x)$ nimmt der Wert von $x(t)$ ab.

- ▷ Entlang des Graphs der Kurve $f(x)$ wechseln sich die Maxima mit den Minima, daher wechseln sich die Nullstellen mit $\frac{\partial f}{\partial x} > 0$ mit den Nullstellen mit $\frac{\partial f}{\partial x} < 0$ ab.

⇒ **instabile** Gleichgewichte wechseln sich mit den **stabilen** ab.

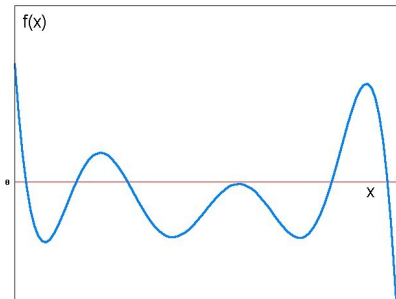
Eindimensionale Dynamik: $\dot{x} = f(x, \mu)$.

- ▷ Variation des Parameters μ deformiert stetig den Graph von $f(x)$.
- ▷ Nullstellen bewegen sich dabei. Aber nicht nur:



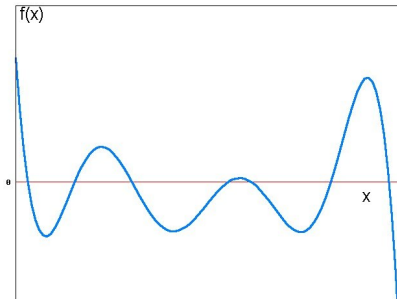
Eindimensionale Dynamik: $\dot{x} = f(x, \mu)$.

- ▷ Variation des Parameters μ deformiert stetig den Graph von $f(x)$.
- ▷ Nullstellen bewegen sich dabei. Aber nicht nur:



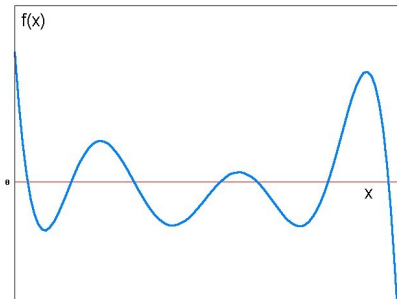
Eindimensionale Dynamik: $\dot{x} = f(x, \mu)$.

- ▶ Variation des Parameters μ deformiert stetig den Graph von $f(x)$.
- ▶ Nullstellen bewegen sich dabei. Aber nicht nur:



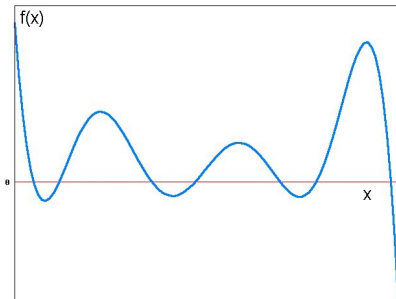
Eindimensionale Dynamik: $\dot{x} = f(x, \mu)$.

- ▶ Variation des Parameters μ deformiert stetig den Graph von $f(x)$.
- ▶ Nullstellen bewegen sich dabei. Aber nicht nur:



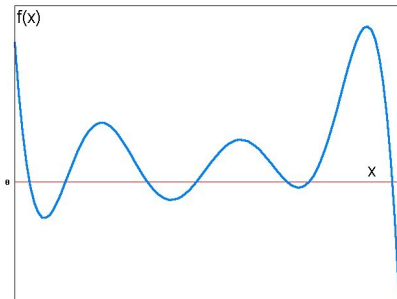
Eindimensionale Dynamik: $\dot{x} = f(x, \mu)$.

- ▷ Variation des Parameters μ deformiert stetig den Graph von $f(x)$.
- ▷ Nullstellen bewegen sich dabei. Aber nicht nur:



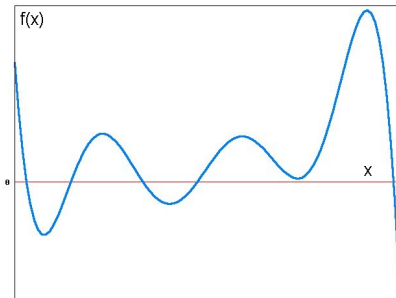
Eindimensionale Dynamik: $\dot{x} = f(x, \mu)$.

- ▶ Variation des Parameters μ deformiert stetig den Graph von $f(x)$.
- ▶ Nullstellen bewegen sich dabei. Aber nicht nur:



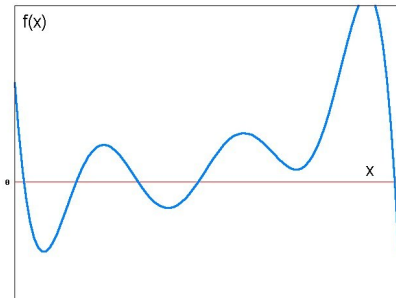
Eindimensionale Dynamik: $\dot{x} = f(x, \mu)$.

- ▶ Variation des Parameters μ deformiert stetig den Graph von $f(x)$.
- ▶ Nullstellen bewegen sich dabei. Aber nicht nur:



Eindimensionale Dynamik: $\dot{x} = f(x, \mu)$.

- ▶ Variation des Parameters μ deformiert stetig den Graph von $f(x)$.
- ▶ Nullstellen bewegen sich dabei. Aber nicht nur:



Eindimensionale Dynamik: $\dot{x} = f(x, \mu)$.

Beobachtungen:

- ▶ Bei Variation eines Parameters **entstehen** die Nullstellen **paarweise** und **verschwinden** ebenso **paarweise**:

jedesmal wenn ein Maximum oder Minimum von $f(x, \mu)$
Vorzeichen wechselt.

Damit ändert sich die Gesamtzahl von Gleichgewichten immer um **2**.

- ▶ Jedes neugeborene/verschwindende Paar besteht aus je **einem stabilen** und **einem instabilen** Gleichgewicht.
- ▶ Beim kritischen Parameterwert ist das System **strukturell instabil**:
eine beliebig kleine Änderung von μ
ändert das Phasenportrait **qualitativ**.

Solche Ereignisse werden **Bifurkationen** genannt.

Bifurkation (Verzweigung) –
eine qualitative Änderung der **Struktur** des Phasenraums,
verursacht durch die Variation des **Parameters**
(oder mehrerer Parameter).

Man spricht von lokalen und globalen Bifurkationen.

- ▷ Die **lokalen Bifurkationen** verändern qualitativ die Eigenschaften (Stabilität, Existenz) von **einzelnen** Objekten im Phasenraum: Gleichgewichten, geschlossenen Bahnkurven usw.
- ▷ Die **globalen Bifurkationen** verändern die ganzen (invarianten) Mengen im Phasenraum: diese Mengen entstehen/verschwinden, kollidieren miteinander.
- ▷ Im Moment einer Bifurkation (bei **kritischem** Parameterwert) wird das System **strukturell instabil**.

Der Begriff einer Bifurkation wurde von Henri Poincaré eingeführt.



Nous dirons alors que s'est une *forme de bifurcation* (1885).



$$\dot{x} = f(x, \mu)$$

Mögliche qualitative Änderungen bei eindimensionalen Systemen:

(a) Ein **Paar** von Gleichgewichten entsteht/verschwindet.

⇒ ein Maximum oder Minimum von $f(x, \mu)$ wechselt Vorzeichen.

$$\Rightarrow \frac{d}{dx} f(x, \mu) \big|_{x=x_*} = 0$$

(b) Ein **Gleichgewicht** wechselt seine Stabilität.

⇒ Ableitung $\frac{d}{dx} f(x, \mu) \big|_{x=x_*}$ wechselt Vorzeichen.

⇒ siehe Fall (a) oben.

▷ Am Bifurkationsparameterwert $\bar{\mu}$ sind zwei Bedingungen erfüllt:

(1) $f(x_*, \bar{\mu}) = 0$ (Gleichgewicht)

(2) $\frac{d}{dx} f(x, \mu) \big|_{x=x_*, \mu=\bar{\mu}} = 0$ (Ableitung verschwindet).

Zwei Gleichungen, zwei unbekannten $(x_*, \bar{\mu})$ – prinzipiell lösbar!



$$\dot{x} = f(x, a)$$

$$f(x, a) = x^3 - ax^2 - 2x + 6$$

$$\frac{df}{dx} = 3x^2 - 2ax - 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^3 + ax^2 - 2x + 6 = 0 \\ 3x^2 - 2ax - 2 = 0 \end{cases}$$

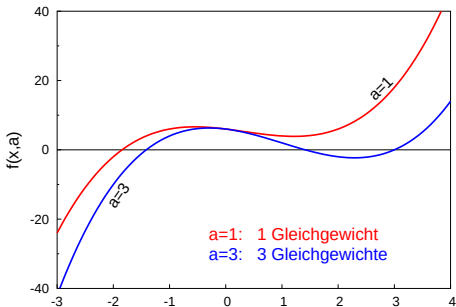
▷ x loswerden: $\Rightarrow$ Resultante

Resultante ist ein Werkzeug der Algebra, um zwei Polynome auf das Vorhandensein gemeinsamer Nullstellen zu prüfen.

z.B. **Mathematica**: Resultant $[x^3 + ax^2 - 2x + 6, 3x^2 - 2ax - 2, x]$

$$\underline{-24a^3 - 4a^2 - 16a + 940} = -4(2a - 5) \underbrace{(47 + 8a + 3a^2)}_{((a+4)^2 + 2a^2 + 31)} = 0 \Rightarrow a = 5/2.$$

▷ Bifurkation findet bei $a = \frac{5}{2}$ statt.



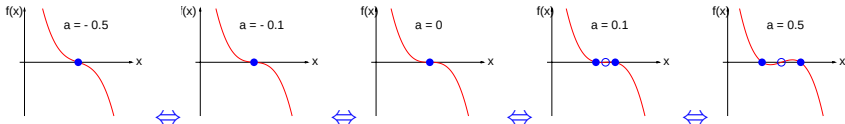


Betrachten wir nun die **parameter-abhängige Schar** von DS

$$\frac{dx}{dt} = f(x) = a x - x^3$$

bei unterschiedlichen Werten vom Parameter a .

Sofort sichtbar: Gleichgewicht am $x=0$ existiert **unabhängig** vom Wert von a .



Aus **einem** stabilen Gleichgewicht werden **drei**:
ein instabiles und zwei stabilen.

Immerhin: auch hier ändert sich die Anzahl von Gleichgewichten um **2**.

Bemerkenswert: beim **kritischen** Parameterwert $a = 0$ gilt am Gleichgewicht nicht nur $f'(x) = 0$ sondern auch $f''(x) = 0$: ein **Wendepunkt** von $f(x)$.
Das ist offensichtlich eine stärkere Entartung als zuvor.



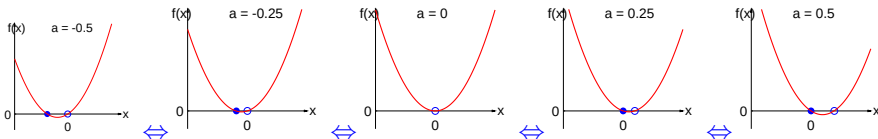
Betrachten wir nun die *parameter-abhängige Schar* von DS

$$\frac{dx}{dt} = f(x) = -ax + x^2$$

bei unterschiedlichen Werten vom Parameter a .

Sofort sichtbar: Gleichgewicht am $x=0$ existiert *unabhängig* vom Wert von a .

Gleichgewicht am $x=a$ existiert auch bei allen Werten von a ,
aber seine Lage ist a -abhängig.



Die Anzahl von Gleichgewichten ändert sich überhaupt *nicht*,
aber sie tauschen die Stabilität untereinander.



Wir verdoppeln die Dimension des Phasenraums und betrachten nun Dynamik von einem System **zweiter** Ordnung.

- ▷ Phasenraum, je nach Problemstellung:
Ebene, Zylindermantel, Kugeloberfläche, eine andere 2D-*Mannigfaltigkeit*...
Lokal reicht es, ein Stück des Phasenraums
als ein Stück der Phasenebene zu betrachten.
 - ▷ Die Reihenfolge “größer/kleiner” gibt es nicht mehr, die Trajektorien dürfen einander überholen (natürlich, ohne einander zu schneiden).
 - ▷ Es bleibt allerdings eine weitere *topologische* Einschränkung:
jede geschlossene Phasenbahn (periodische Lösung)
teilt den Phasenraum ins “*innere*” und “*äußere*”.
Befindet sich der Anfangspunkt der Phasentrajektorie
im inneren einer geschlossenen Bahnkurve,
so bleibt diese ganze Trajektorie innerhalb dieser Kurve.
- Das hat weitreichende Konsequenzen für die Existenz der **periodischen Lösungen**, die wir später diskutieren. Heute beschränken wir uns aber auf die Eigenschaften der **Gleichgewichte** in 2D.

Gleichgewichte in der Phasenebene

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y) \\ \dot{y} = g(x, y) \end{cases} \cdot \text{Gleichgewicht} \begin{pmatrix} x_* \\ y_* \end{pmatrix}: \begin{pmatrix} f(x_*, y_*) = 0 \\ g(x_*, y_*) = 0 \end{pmatrix}.$$

1. Koordinatenverschiebung: Gleichgewicht $\Rightarrow$ Ursprung.

$$\text{Neue Koordinaten: Abweichungen vom Gleichgewicht} \begin{cases} x_1 = x - x_* \\ x_2 = y - y_* \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 = g(x_1, x_2) \end{cases}, \text{ mit } \begin{cases} f(0, 0) = 0 \\ g(0, 0) = 0 \end{cases}.$$

2. Linearisierung am Gleichgewicht:

$$\text{Taylor-Entwicklung der rechten Seiten} \begin{cases} \dot{x}_1 = \frac{\partial f}{\partial x_1} x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} x_2 + O(|x^2|) \\ \dot{x}_2 = \frac{\partial g}{\partial x_1} x_1 + \frac{\partial g}{\partial x_2} x_2 + O(|x^2|) \end{cases}$$

(alle partielle Ableitungen berechnet bei $x_1 = x_2 = 0$)

Klassifikation von Gleichgewichten in der Phasenebene

Linearisierung: $\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ \dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{cases}$. Jacobian: $J = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

Charakteristische Gleichung: $\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = 0$
 $\lambda^2 - \text{Sp}(J)\lambda + \det(J) = 0$

Eigenwerte λ (und damit die Stabilität **quantitativ**) sind nur von den **Invarianten** der Jacobi-Matrix abhängig: deren Spur und Determinante.

Bei Transformationen von Variablen bleiben die Eigenwerte **invariant**!

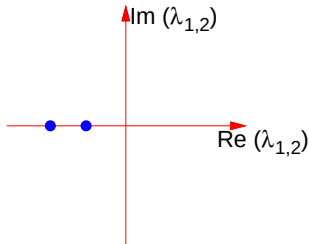
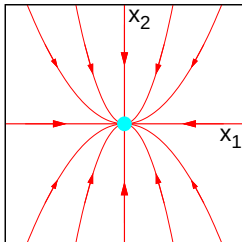
Klassifikation von Gleichgewichten in der Phasenebene

Linearisierung: $\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ \dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{cases}$. Jacobian: $J = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

Charakteristische Gleichung: $\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = 0$

$$\lambda^2 - \text{Sp}(J)\lambda + \det(J) = 0$$

▷ λ_1 und λ_2 reell und negativ: **stabiler Knoten** (stable node).



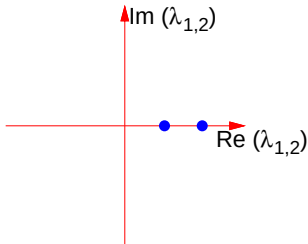
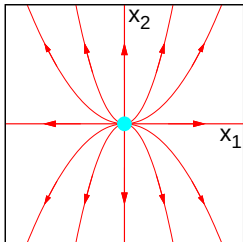
Klassifikation von Gleichgewichten in der Phasenebene

Linearisierung: $\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ \dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{cases}$. Jacobian: $J = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

Charakteristische Gleichung: $\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = 0$

$$\lambda^2 - \text{Sp}(J)\lambda + \det(J) = 0$$

▷ λ_1 und λ_2 reell und positiv: **instabiler Knoten** (unstable node).



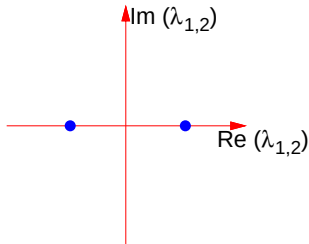
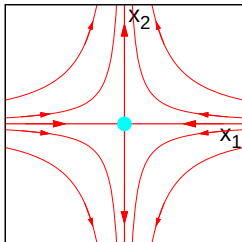
Klassifikation von Gleichgewichten in der Phasenebene

Linearisierung: $\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ \dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{cases}$. Jacobian: $J = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

Charakteristische Gleichung: $\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = 0$

$$\lambda^2 - \text{Sp}(J)\lambda + \det(J) = 0$$

▷ λ_1 und λ_2 reell, mit unterschiedlichen Vorzeichen: **Sattel** (saddle).



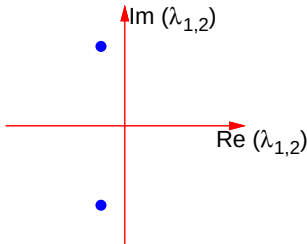
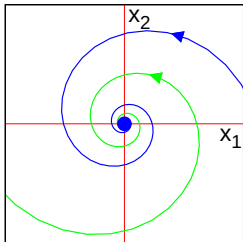
Klassifikation von Gleichgewichten in der Phasenebene

Linearisierung: $\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ \dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{cases}$. Jacobian: $J = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

Charakteristische Gleichung: $\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = 0$

$$\lambda^2 - \text{Sp}(J)\lambda + \det(J) = 0$$

▷ $\text{Re}(\lambda_1) = \text{Re}(\lambda_2) < 0$: **stabiler Fokus (Strudel)** (stable focus).



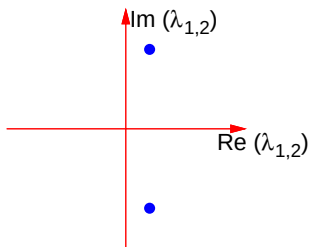
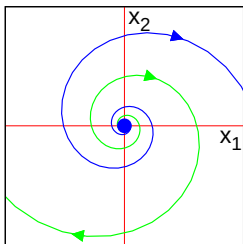
Klassifikation von Gleichgewichten in der Phasenebene

Linearisierung: $\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ \dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{cases}$. Jacobian: $J = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

Charakteristische Gleichung: $\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = 0$

$$\lambda^2 - \text{Sp}(J)\lambda + \det(J) = 0$$

▷ $\text{Re}(\lambda_1) = \text{Re}(\lambda_2) > 0$: instabiler Fokus (Strudel) (unstable focus).



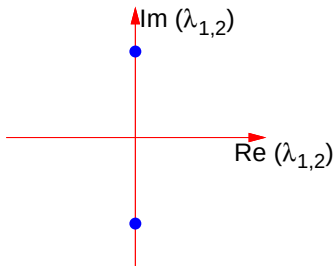
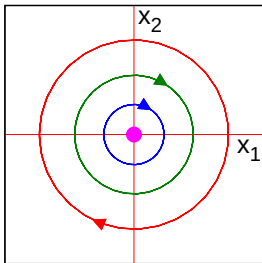
Klassifikation von Gleichgewichten in der Phasenebene

Linearisierung: $\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ \dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{cases}$. Jacobian: $J = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

Charakteristische Gleichung: $\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = 0$

$$\lambda^2 - \text{Sp}(J) \lambda + \det(J) = 0$$

▷ λ_1 und λ_2 rein imaginär: **Zentrumspunkt** (center).





Vieta-Satz und Wurzel der quadratischen Gleichung:

Seien A und B die Koeffizienten der quadratischen Gleichung

$$x^2 + Ax + B = 0$$

und x_1 und x_2 deren Lösungen (Wurzeln), reell oder komplex-konjugiert.
Dann gilt

$$x_1 + x_2 = -A, \quad x_1 \cdot x_2 = B.$$

Beweis: einfach $(x - x_1) \cdot (x - x_2)$ ausmultiplizieren.

Verallgemeinerung

Seien $x_1, x_2, \dots, x_n$ Wurzeln des Polynoms n . Grades

$$P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \dots + a_1x + a_0.$$

Dann gilt $\sum_{j=1}^n x_j = -a_{n-1},$

$$\prod_{j=1}^n x_j = x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_{n-1} \cdot x_n = (-1)^n a_0$$

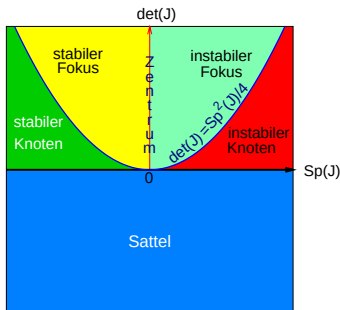
und noch $n - 2$ ähnliche Relationen.

Klassifikation von Gleichgewichten in der Phasenebene

Linearisierung: $\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ \dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{cases}$. Jacobian: $J = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

Charakteristische Gleichung: $\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = 0$
 $\lambda^2 - \text{Sp}(J)\lambda + \det(J) = 0$

- Unter Berücksichtigung des **Satzes von Vieta** erfolgt die endgültige Zuordnung:





Definition: ein Gleichgewicht heißt **hyperbolisch**, falls
für jeden Eigenwert λ_j seiner Jacobi-Matrix gilt: $\operatorname{Re}(\lambda_j) \neq 0$.

Satz von Grobman und Hartman

*In einer Umgebung eines hyperbolischen Gleichgewichts existiert eine eindeutige und umkehrbar stetige Abbildung, die die Trajektorien des **nichtlinearen** Systems auf die Trajektorien des **linearisierten** Systems abbildet.*

- ▷ *Diese Abbildung bewahrt die Zeitrichtung und Trajektorienrichtung.*

Damit gibt die **Linearisierung** Aufschluss über den Aufbau des Phasenportraits in einem **nichtlinearen** System in der Nähe eines hyperbolischen Gleichgewichts.

(gilt bei beliebiger Dimension des Phasenraums).