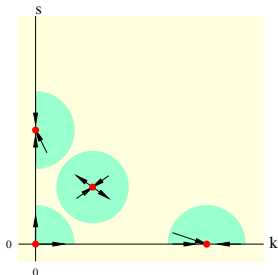


Vorlesung 5.

Zweidimensionale Dynamik: Existenz und Nicht-Existenz periodischer Lösungen



Vervollständigung

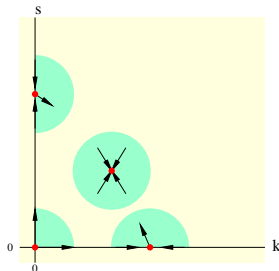


Linearisierte Gleichungen liefern korrektes Bild in den lokalen Umgebungen aller Gleichgewichte (dank Grobman-Hartman Satz).

Kann man aus diesen Stücken ein **globales** Gesamtbild zusammenflicken?

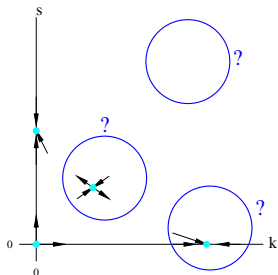
Dafür fehlt uns das Wissen, ob **geschlossene Bahnen** (periodische Orbits) in diesem Quadranten der Phasenebene ebenso vorhanden sind.

Explizit (in der Regel) kann man sie nicht finden.





Vervollständigung

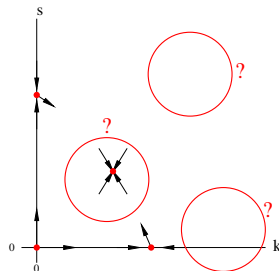


Linearisierte Gleichungen liefern korrektes Bild in den lokalen Umgebungen aller Gleichgewichte (dank Grobman-Hartman Satz).

Kann man aus diesen Stücken ein **globales** Gesamtbild zusammenflicken?

Dafür fehlt uns das Wissen, ob **geschlossene Bahnen** (periodische Orbits) in diesem Quadranten der Phasenebene ebenso vorhanden sind.

Explizit (in der Regel) kann man sie nicht finden.

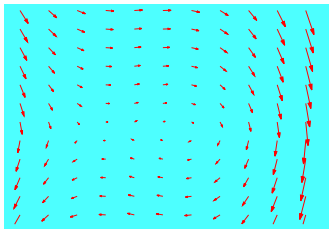


Ein autonomes dynamisches System

$$\frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1, x_2), \quad \frac{dx_2}{dt} = f_2(x_1, x_2)$$

definiert im zweidimensionalen Phasenraum ein **Vektorfeld**:

jedem Punkt (x_1, x_2) wird
ein Vektor mit Komponenten
 $(f_1(x_1, x_2), f_2(x_1, x_2))$
zugeordnet.

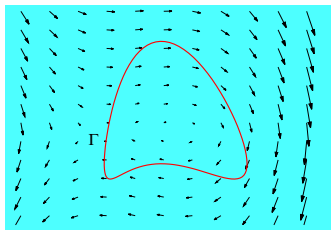


In jedem Punkt (außer Gleichgewichte) ist dieser Vektor
entlang der Lösungskurve gerichtet, die durch diesen Punkt verläuft.

Richtung: $\varphi = \arctan \frac{f_2(x_1, x_2)}{f_1(x_1, x_2)}$



Nun legen wir auf die Phasenebene
eine geschlossene Kurve Γ
(nicht unbedingt eine *Bahnkurve*),
die sich selbst nicht schneidet,
und auf der **kein** Gleichgewicht liegt:

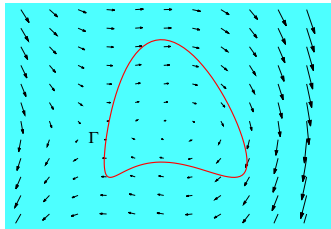


Wir wählen auf Γ einen beliebigen Anfangspunkt,
gehen einmal um Γ herum (z.B. *im Gegenuhrzeigesinn*)
und zählen die Umdrehungen des Vektorfeldes auf diesem Weg.

Die Anzahl der Umdrehungen heißt **Poincaré-Index** $I(\Gamma)$.

Der Wert von $I(\Gamma)$ ist offensichtlich **ganzzahlig**
und unabhängig vom Anfangspunkt auf Γ .

Nun legen wir auf die Phasenebene eine geschlossene Kurve Γ (nicht unbedingt eine *Bahnkurve*), die sich selbst **nicht** schneidet, und auf der **kein** Gleichgewicht liegt:



Berechnung

(Index als Integral: Summe infinitesimaler Drehungen entlang der Kurve)

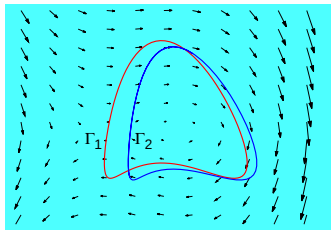
$$I(\Gamma) = \frac{1}{2\pi} \oint_{\Gamma} d\varphi = \frac{1}{2\pi} \oint_{\Gamma} d \left(\arctan \frac{f_2(x_1, x_2)}{f_1(x_1, x_2)} \right) = \frac{1}{2\pi} \oint_{\Gamma} \frac{f_1 df_2 - f_2 df_1}{f_1^2 + f_2^2}$$

mit $df_1 = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} dx_2$ und $df_2 = \frac{\partial f_2}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} dx_2$.

Da der Nenner $f_1^2 + f_2^2$ nirgendwo auf Γ verschwindet, ist $I(\Gamma)$ eindeutig definiert und eine stetige Funktion von Γ .

Bei Zeitumkehr $t \rightarrow -t$ dreht sich jeder Vektor um π ; der Wert von $I(\Gamma)$ bleibt dabei invariant.

Welche Auswirkungen hat eine hinreichend kleine **stetige** Verschiebung und/oder **stetige** Deformation von Γ (so dass **kein Gleichgewicht berührt wird**) ?



Wegen Stetigkeit darf $I(\Gamma_2)$ nur geringfügig vom $I(\Gamma_1)$ abweichen.

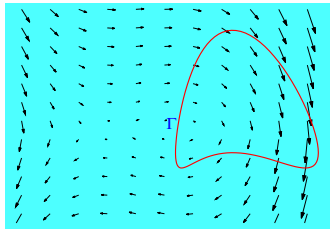
Aber eine **ganzzahlige** Funktion kann man nicht „geringfügig“ ändern!

$$\Rightarrow I(\Gamma_1) = I(\Gamma_2)$$

Folge: zwei **beliebige** (und damit **alle**) geschlossene Kurven, die so ineinander **stetig** überführt werden können, dass bei der Transformation **kein** Gleichgewicht berührt wird, haben **denselben** Wert des Indexes I .

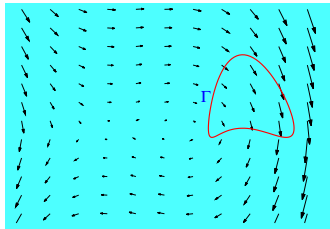


*Eine geschlossene Kurve Γ , die **keine** Gleichgewichte in ihrem Inneren hat, kann stetig verkleinert und schließlich zu einem Punkt zusammengezogen werden.*



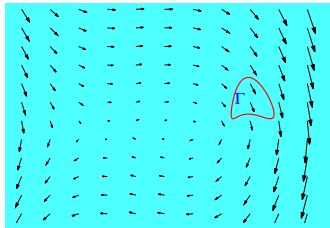


*Eine geschlossene Kurve Γ , die **keine** Gleichgewichte in ihrem Inneren hat, kann stetig verkleinert und schließlich zu einem Punkt zusammengezogen werden.*



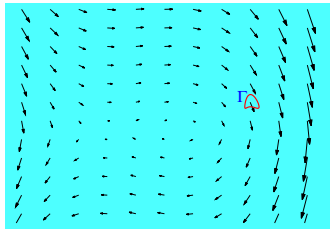


Eine geschlossene Kurve Γ , die keine Gleichgewichte in ihrem Inneren hat, kann stetig verkleinert und schließlich zu einem Punkt zusammengezogen werden.



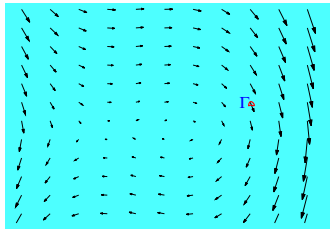


Eine geschlossene Kurve Γ , die keine Gleichgewichte in ihrem Inneren hat, kann stetig verkleinert und schließlich zu einem Punkt zusammengezogen werden.



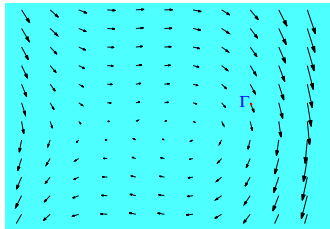


Eine geschlossene Kurve Γ , die keine Gleichgewichte in ihrem Inneren hat, kann stetig verkleinert und schließlich zu einem Punkt zusammengezogen werden.





*Eine geschlossene Kurve Γ , die **keine** Gleichgewichte in ihrem Inneren hat, kann stetig verkleinert und schließlich zu einem Punkt zusammengezogen werden.*



Damit wird φ entlang der (geschrumpften) Kurve konstant.

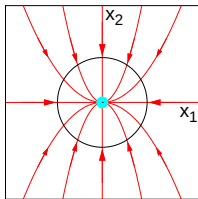
Das Vektorfeld behält Richtung und dreht sich nicht.

Deswegen gilt für alle solche Kurven: $I(\Gamma) = 0$.



Eine geschlossene Kurve Γ mit einem Gleichgewicht in ihrem Inneren kann zu diesem Gleichgewicht zusammengezogen werden.

Dort kann man den Indexwert durch die Felddrehung direkt „ablesen“. Dieser Wert wird dann auch dem Gleichgewicht zugeordnet:

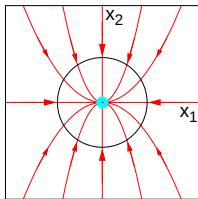


$$I(\text{Knoten})=1$$

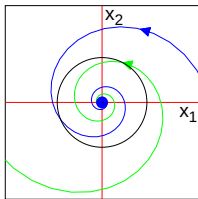


Eine geschlossene Kurve Γ mit *einem* Gleichgewicht in ihrem Inneren kann zu diesem Gleichgewicht zusammengezogen werden.

Dort kann man den Indexwert durch die Felddrehung direkt „ablesen“. Dieser Wert wird dann auch dem Gleichgewicht zugeordnet:



$$I(\text{Knoten})=1$$

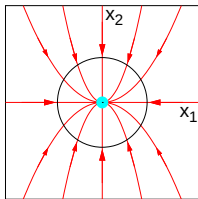


$$I(\text{Fokus})=1$$

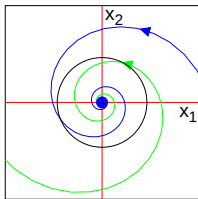


Eine geschlossene Kurve Γ mit *einem* Gleichgewicht in ihrem Inneren kann zu diesem Gleichgewicht zusammengezogen werden.

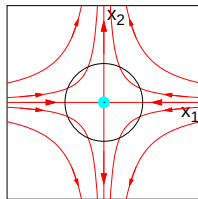
Dort kann man den Indexwert durch die Felddrehung direkt „ablesen“. Dieser Wert wird dann auch dem Gleichgewicht zugeordnet:



$$I(\text{Knoten})=1$$



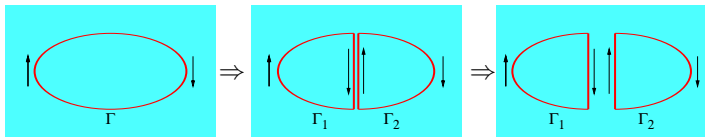
$$I(\text{Fokus})=1$$



$$I(\text{Sattel})=-1$$



A. Der Index ist additiv:



B. Deswegen ist Index jeder geschlossenen Kurve **gleich der Summe** von Indexwerten aller Gleichgewichte in deren Inneren.

C. Betrachten wir nun eine geschlossene **Bahn**kurve (Phasentrajektorie). Da das Vektorfeld stets **entlang** der Bahn zeigt, macht es insgesamt **genau eine** Umdrehung. $\Rightarrow I(\text{Bahnkurve}) = 1$.

D. Aus B und C folgt:
innerhalb jeder geschlossenen Bahnkurve liegt mindestens ein Gleichgewicht.

Genauer:

innerhalb jeder geschlossenen Bahnkurve liegen $2n+1$ Gleichgewichte;
 n davon sind Sattelpunkte ($n=0,1,2,\dots$).

Folge: **Periodische Trajektorien in der Phasenebene dürfen weder um einzelne Sattelpunkte herum, noch in den „leeren“ Bereichen liegen.**



Themenwechsel: Integralsatz von Gauß (zwei-dimensional):

Es seien: a) S eine kompakte Menge in der Ebene mit dem Rand Γ ,
und b) $\mathbf{F}$ ein stetig differenzierbares Feld auf dieser Ebene.

Dann gilt: $\int_S \operatorname{div} \mathbf{F} \, dx_1 \, dx_2 = \oint_{\Gamma} F_n \, d\Gamma$ (F_n – Normalkomponente von $\mathbf{F}$
auf dem Rand).

Bei einer Bahnkurve zeigt das Feld immer entlang der Bahn $\Rightarrow F_n = 0$.

Damit gilt für jede geschlossene Bahn: $\int_S \operatorname{div} \mathbf{F} \, dx_1 \, dx_2 = 0$.

Ist es wirklich selbstverständlich?

Das Integral von der Divergenz über das innere **jeder** geschlossenen Phasentrajektorie **ist identisch Null** !

Es folgt daraus ein negatives *Divergenz-Kriterium*:

*in einem Gebiet der Phasebene,
in dem die Divergenz vom $\mathbf{F}$ keine Nulstellen aufweist
(und damit überall dasselbe Vorzeichen hat),
können **keine** geschlossene Trajektorien liegen.*

Falls beide rechte Seiten von

$$dx_1/dt = f_1(x_1, x_2), \quad dx_2/dt = f_2(x_1, x_2)$$

mit einer beliebigen **positiven** Funktion $g(x_1, x_2)$ multipliziert werden:

$$dx_1/dt = f_1(x_1, x_2) g(x_1, x_2), \quad dx_2/dt = f_2(x_1, x_2) g(x_1, x_2),$$

dann ändern sich die Vektorlängen, aber die Winkel bleiben invariant:

$$\varphi(x_1, x_2) = \arctan \frac{f_2(x_1, x_2) g(x_1, x_2)}{f_1(x_1, x_2) g(x_1, x_2)} = \arctan \frac{f_2(x_1, x_2)}{f_1(x_1, x_2)}$$

Das neue Vektorfeld richtet sich weiterhin **entlang** der Bahnkurven, besitzt **keine** Normalkomponente zu den Bahnkurven,

deswegen gilt für jede geschlossene Bahnkurve:

$$\int_S \operatorname{div} \left(g(x_1, x_2) \mathbf{F}(x_1, x_2) \right) dx_1 dx_2 = 0.$$

(Integration auf dem ganzen Innengebiet S dieser Kurve)



Dulac-Kriterium:

Es folgt ein negatives Kriterium für periodische Lösungen:

falls in einem Gebiet $G \ni$ eine stetig differenzierbare Funktion $g(x_1, x_2)$,

so dass $\forall (x_1, x_2) \in G: \begin{cases} g(x_1, x_2) > 0 \\ \operatorname{div}(g(x_1, x_2) \mathbf{F}(x_1, x_2)) \neq 0 \end{cases}$

dann liegen in G **keine** geschlossenen Bahnkurven des dynamischen Systems $\mathbf{F}$.

Beispiel: Lotka-Volterra Gleichungen:

$$dx/dt = x(\alpha_1 - \beta_1 x + \kappa_1 y),$$

$$dy/dt = y(\alpha_2 - \beta_2 y + \kappa_2 x)$$

mit **positiven** Selbstbeschränkungskoeffizienten $\beta_{1,2}$ auf dem Gebiet $x, y > 0$.

Für $g(x, y) = \frac{1}{xy}$ ergibt sich $\operatorname{div}(g(x, y) \mathbf{F}(x, y)) = -\frac{\beta_1}{y} - \frac{\beta_2}{x} < 0$.

$\Rightarrow$ LV-Gleichungen haben **keine** periodische Lösungen
im Bereich $x, y > 0$ der Phasenebene (unabhängig von $\alpha_{1,2}$ und $\kappa_{1,2}$) !



Poincaré-Bendixson-Kriterium:

Ein positives Kriterium für periodische Lösungen:

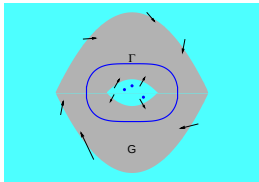
falls $\exists$ ein Gebiet G der Phasenebene, so dass

- a) an dessen ganzer Grenze das Feld F „nach innen“ zeigt, und
- b) in G keine Gleichgewichte liegen,

dann gibt es im Inneren von G

mindestens eine **asymptotisch stabile** geschlossene Bahnkurve.

- ▷ **Erläuterung:** Da die Trajektorien G nicht verlassen, muss im Inneren von G mindestens ein Attraktor liegen, und zwar kein Gleichgewicht.



G muss wenigstens ein „Loch“ haben:
wegen des Poincaré-Indexes muss es Gleichgewichte
im Inneren der periodischen Lösung Γ geben,
die aber nicht im Inneren von G liegen dürfen.
Deswegen ist die **Grenze von G**
nicht zusammenhängend!



Wir haben festgestellt: *Lotka-Volterra Gleichungen*

$$dx/dt = x(\alpha_1 - \beta_1 x + \kappa_1 y),$$

$$dy/dt = y(\alpha_2 - \beta_2 y + \kappa_2 x)$$

mit **positiven** Selbstbeschränkungskoeffizienten $\beta_{1,2}$

haben **keine** periodische Lösungen im Bereich $x, y > 0$ der Phasenebene (unabhängig von $\alpha_{1,2}$ und $\kappa_{1,2}$).

- ▷ Die **einzig**e verbliebene Möglichkeit: **keine** Selbstbeschränkung, $\beta_1 = \beta_2 = 0$.

$$dx/dt = x(\alpha_1 + \kappa_1 y), \quad dy/dt = y(\alpha_2 + \kappa_2 x)$$

(*Ursprüngliches Modell von Lotka (1925) und Volterra (1926) !*)

- ▷ Nur 2 Gleichgewichte: $x = y = 0$ und $x = -\frac{\alpha_2}{\kappa_2}, y = -\frac{\alpha_1}{\kappa_1}$.

⇒ (α_1 und κ_1) sowie (α_2 und κ_2) haben unterschiedliche Vorzeichen.

Beispiel:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x(-2 + y) \\ \dot{y} &= y(3 - x)\end{aligned}$$

Räuber-Beute System: Räuber x stirbt schnell aus (verhungert)
in Abwesenheit der Beute y .

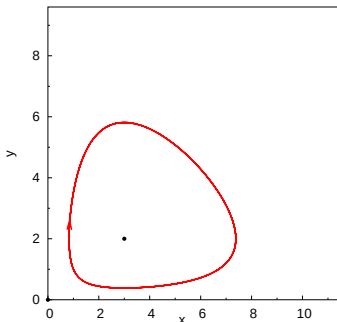
Und die Beute y in Abwesenheit vom Räuber x erlebt uneingeschränktes Wachstum.



$$\begin{aligned}\dot{x} &= x(-2 + y) \\ \dot{y} &= y(3 - x).\end{aligned}$$

Gleichgewichte: $x=y=0$ (Sattel!) und $x=3, y=2$ (Zentrumspunkt!!)

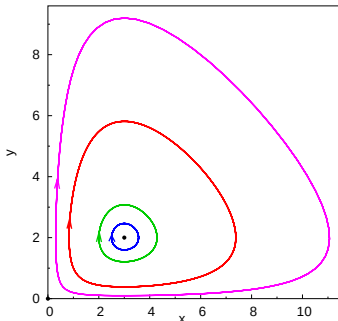
Numerisches Integrieren:
Drehung im Uhrzeigesinn



$$\begin{aligned}\dot{x} &= x(-2 + y) \\ \dot{y} &= y(3 - x).\end{aligned}$$

Gleichgewichte: $x=y=0$ (Sattel!) und $x=3, y=2$ (Zentrumspunkt!!)

Numerisches Integrieren:
Drehung im Uhrzeigesinn



Jeder Punkt im positiven Quadrant liegt auf einer geschlossenen Phasenbahn:
Ein Kontinuum von periodischen Lösungen, mit Zentrumspunkt in der Mitte.

Maxima für Räuber x folgen den Maxima für Beute y mit Zeitverzögerung.



$$\frac{dx}{dt} = x(\alpha_1 + \kappa_1 y)$$

$$\frac{dy}{dt} = y(\alpha_2 + \kappa_2 x).$$

Gleichung der Phasenkurven: $\frac{dx}{dy} = \frac{x(\alpha_1 + \kappa_1 y)}{y(\alpha_2 + \kappa_2 x)}$

Variablentrennung: $\frac{dx(\alpha_2 + \kappa_2 x)}{x} = \frac{dy(\alpha_1 + \kappa_1 y)}{y}$

Integrieren: $\int \frac{dx(\alpha_2 + \kappa_2 x)}{x} = \int \frac{dy(\alpha_1 + \kappa_1 y)}{y} + C$

Ergebnis: Kurvengleichung $\kappa_2 x + \alpha_2 \ln x - \kappa_1 y - \alpha_1 \ln y = C$

Jedem Wert der Konstante C („Energie“?)

entspricht eine geschlossene Bahnkurve: periodische Bewegung.

Dabei in Koordinaten x, y ist es **kein** Hamiltonsches System:

$$\operatorname{div}(\mathbf{F}) = \alpha_1 + \alpha_2 + \kappa_1 y + \kappa_2 x \neq 0.$$

Es stimmt aber für die Mittelwerte (gemittelt über die Periode):

$$\langle \operatorname{div}(\mathbf{F}) \rangle = \alpha_1 + \alpha_2 + \kappa_1 \langle y \rangle + \kappa_2 \langle x \rangle = 0.$$