

Vorlesung 6.

Bifurkationen I: Allgemeine Überlegungen; Invariante Mannigfaltigkeiten



Bifurkationen: qualitative Änderungen des Phasenportraits bei infinitesimalen Variationen des Kontrollparameters.

Geometrische Darstellung: Ein dynamisches System N -ter Ordnung

$$\frac{dx}{dt} = F(x), \quad x \in \mathcal{R}^N$$

definiert im N -dimensionalen Phasenraum ein **Vektorfeld**:

jedem Punkt $(x_1, \dots, x_N)$ wird ein N -Vektor mit Komponenten $(F_1(x_1, \dots, x_N), \dots, F_N(x_1, x_N))$ zugeordnet.

- ▷ Gesamtheit dieser Felder bildet **auch** einen Raum:

Raum dynamischer Systeme N -ter Ordnung.

Jeder Punkt in diesem Raum **ist** ein Vektorfeld (ein dynamisches System).

Kontrollparameter werden zu Koordinaten in diesem Raum.

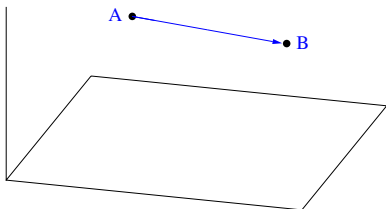
*(deswegen spricht man auch vom **Parameterraum**):*

m Parameter $\Rightarrow$ m -dimensionaler Parameterraum.

- ▷ Variation von einem/mehreren Kontrollparameter:

Bewegung durch den Parameterraum, kontinuierliche Änderung vom System.

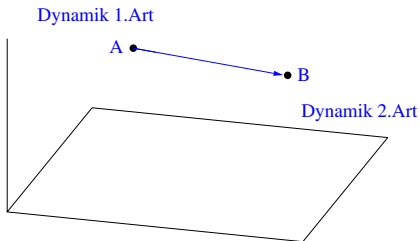
Variation des Kontrollparameters: Bewegung durch den Parameterraum.
Keine qualitative Änderung der Dynamik auf dem Weg.



Jeder Pfad von A nach B ist durch **einen** Parameter parametrisierbar:
1-param. Familie von DS

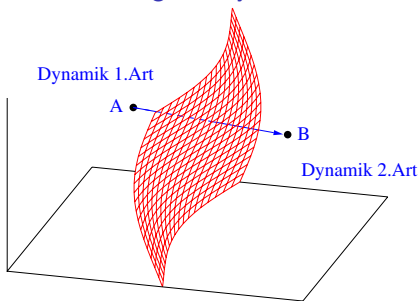
Variation des Kontrollparameters: Bewegung durch den Parameterraum.

Eine qualitative Änderung der Dynamik auf dem Weg.



Variation des Kontrollparameters: Bewegung durch den Parameterraum.

Eine qualitative Änderung der Dynamik auf dem Weg.



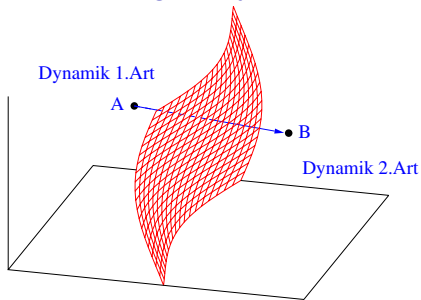
Unterwegs findet eine Bifurkation statt.

Gebiete mit derselben qualitativen Dynamik (*selbe Anzahl von Gleichgewichten, selbe Anzahl von positiven/negativen Eigenwerten bei jedem davon usw.*) sind m -dimensionale Objekte im m -dimensionalen Parameterraum.

- ▷ Bifurkationen finden an $(m-1)$ -dimensionalen Flächen statt, die diese Gebiete voneinander trennen.

Variation des Kontrollparameters: Bewegung durch den Parameterraum.

Eine qualitative Änderung der Dynamik auf dem Weg.



Bifurkationen finden an $(m-1)$ -dimensionalen Flächen statt:

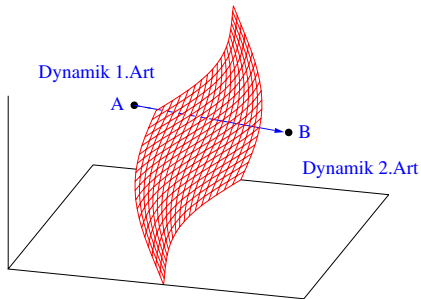
- ▷ für Systeme mit einem Parameter ($m=1$) – in den Punkten,
- ▷ für Systeme mit zwei Parametern ($m=2$) – auf den Linien,
- ▷ für Systeme mit drei Parametern ($m=3$) – auf den 2D-Flächen,

...

- ▷ Dabei kann es in allen Fällen dieselbe Bifurkation sein
(z.B. Zusammenstoß und Verschwinden von zwei Gleichgewichten)

Variation des Kontrollparameters: Bewegung durch den Parameterraum.

Eine qualitative Änderung der Dynamik auf dem Weg.



Bifurkationen finden an $(m-1)$ -dimensionalen Flächen statt.

Besondere Bedingungen werden aufgezählt:

- ▷ z. B. reeller Eigenwert einer Jakobi-Matrix verschwindet,
- ▷ oder ein komplexes Paar von Eigenwerten wird rein imaginär, ...

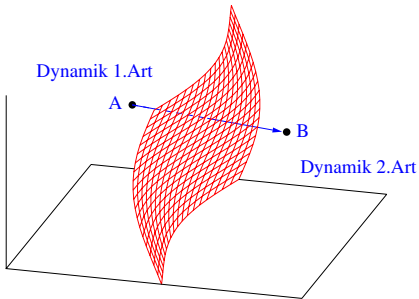
Gesamtanzahl dieser Bedingungen nennt man **Kodimension**:

Dimension, die bis zur „vollen“ (m) fehlt.

(z.B. Zusammenstoß von zwei Gleichgewichten hat Kodimension 1.)

Variation des Kontrollparameters: Bewegung durch den Parameterraum.

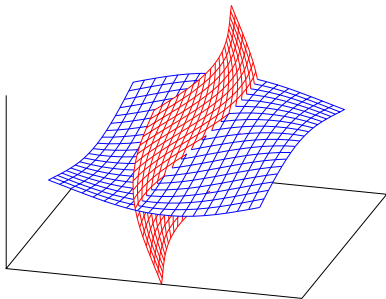
Eine qualitative Änderung der Dynamik auf dem Weg.



Beispiel von Bifurkation mit Kodimension 1
(Bifurkationsfläche trennt voneinander Volumen im Parameterraum)

Variation des Kontrollparameters: Bewegung durch den Parameterraum.

Mehrere qualitative Änderungen der Dynamik auf dem Weg.



Zwei unterschiedliche Bifurkationsflächen:

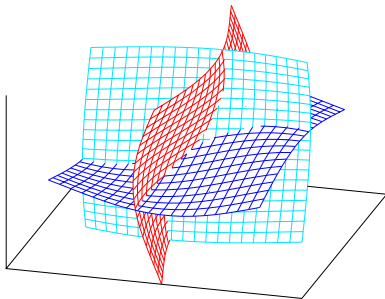
jede Bifurkation alleine hat Kodimension 1;

ihr gemeinsames Auftreten hat Kodimension 2:

„fehlende“ Dimension bei deren Schnittmenge im Parameterraum

Variation des Kontrollparameters: Bewegung durch den Parameterraum.

Mehrere qualitative Änderungen der Dynamik auf dem Weg.



Drei unterschiedlichen Bifurkationsflächen:

jede Bifurkation alleine hat Kodimension 1;

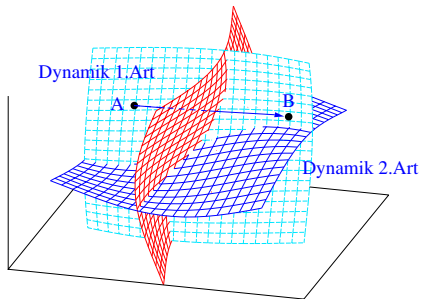
gemeinsames Auftreten von zwei hat Kodimension 2;

gemeinsames Auftreten von allen drei hat Kodimension 3;

„fehlende“ Dimension bei deren Schnittmenge im Parameterraum

Variation des Kontrollparameters: Bewegung durch den Parameterraum.

Mehrere qualitative Änderungen der Dynamik auf dem Weg.



Drei unterschiedliche Bifurkationsflächen:

jede Bifurkation alleine hat Kodimension 1;

gemeinsames Auftreten von zwei hat Kodimension 2;

gemeinsames Auftreten von allen drei hat Kodimension 3;

„fehlende“ Dimension bei deren Schnittmenge im Parameterraum

Wichtig: Es sind in 1-parametrischen Familien von dynamischen Systemen nur Bifurkationen von Kodimension 1 prinzipiell unvermeidbar.



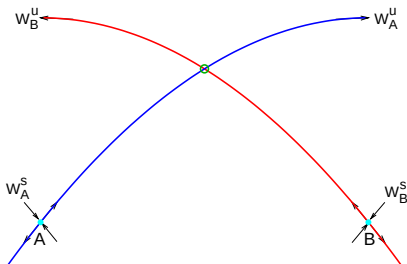
Invariante Mannigfaltigkeiten

- ▷ **Stabile Mannigfaltigkeit W^s** eines Gleichgewichts $\mathbf{x}_0$:
Gesamtheit aller Anfangspunkten $\mathbf{x}$ von Trajektorien,
die bei $t \rightarrow \infty$ gegen $\mathbf{x}_0$ streben: $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0$.
(bei einem asymptotisch stabilen Gleichgewicht: W^s gleich Einzugsgebiet).
 - ▷ **Instabile Mannigfaltigkeit W^u** eines Gleichgewichts $\mathbf{x}_0$:
Gesamtheit aller Anfangspunkten $\mathbf{x}$ von Trajektorien,
die bei $t \rightarrow -\infty$ gegen $\mathbf{x}_0$ streben: $\lim_{t \rightarrow -\infty} \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0$.
(bei einem asymptotisch stabilen Gleichgewicht: W^u besteht nur aus $\mathbf{x}_0$ selbst).
- Beide sind offensichtlich **invariant**:
- jeder Punkt auf einer Bahn, die bei $t \rightarrow \infty$ gegen $\mathbf{x}_0$ strebt, gehört zu W^s
jeder Punkt auf einer Bahn, die bei $t \rightarrow -\infty$ gegen $\mathbf{x}_0$ strebt, gehört zu W^u .

Invariante Mannigfaltigkeiten

A und B : zwei **instabile** Gleichgewichte in einem Dynamischen System.

- ▷ **Gleichnamige** Mannigfaltigkeiten von **zwei** Gleichgewichten
(W^s von A und W^s von B **oder** W^u von A und W^u von B)
können sich im Phasenraum **nicht** schneiden.
(sonst wäre der Eindeutigkeitssatz verletzt:
der Schnittpunkt hätte 2 Zukunften oder 2 Vergangenheiten)



unmöglich !

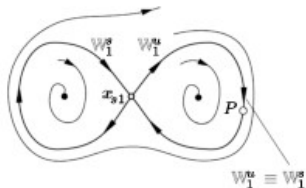
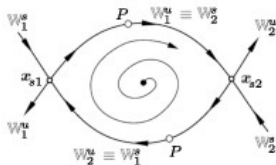
Invariante Mannigfaltigkeiten

A und **B**: zwei **instabile** Gleichgewichte in einem dynamischen System.

- ▷ **Gleichnamige** Mannigfaltigkeiten von **zwei** Gleichgewichten können sich im Phasenraum nicht schneiden.

(sonst wäre der Eindeutigkeitssatz verletzt: 2 Zukunften / 2 Vergangenheiten)

- ▷ **Unterschiedliche** Mannigfaltigkeiten von **zwei** Gleichgewichten ~~können sich im Phasenraum schneiden~~
können im Phasenraum **glatt ineinander übergehen**.





Invariante Mannigfaltigkeiten

A und **B**: zwei **instabile** Gleichgewichte in einem dynamischen System.

- ▷ **Gleichnamige** Mannigfaltigkeiten von **zwei** Gleichgewichten können sich im Phasenraum nicht schneiden.
(sonst wäre der Eindeutigkeitssatz verletzt: 2 Zukunften / 2 Vergangenheiten)
- ▷ **Unterschiedliche** Mannigfaltigkeiten von **zwei** Gleichgewichten **können** im Phasenraum glatt ineinander übergehen.
- ▷ Eine Trajektorie $\Gamma(t)$ vom Gleichgewicht **A** zum Gleichgewicht **B**:
 $(\lim_{t \rightarrow -\infty} \Gamma(t) = A, \lim_{t \rightarrow \infty} \Gamma(t) = B)$
heißt **Heterokline** (biasymptotische Trajektorie)
heteroclinic orbit, biasymptotic trajectory, saddle connection.
- ▷ Eine Trajektorie $\Gamma(t)$ von **A** nach **A**: $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \Gamma(t) = A$
heißt **Homokline** (biasymptotische Trajektorie)
homoclinic orbit, biasymptotic trajectory.

Da eine Homokline eine geschlossene Bahn bildet,

ist sie ein Grenzfall: **periodische Bewegung mit unendlicher Periodendauer**.

Ähnlich: Verbindung zweier Heteroklinen $A \rightarrow B \rightarrow A$ (heteroclinic contour)
ist ebenso eine geschlossene Bahn.



Invariante Mannigfaltigkeiten

Wir **linearisieren** die Gleichungen in der Umgebung des Gleichgewichts x_0 .
(*hinreichend nah, gibt es kaum Unterschiede in der Dynamik*).

- ▷ Sei n Anzahl von Eigenwerten der Jacobi-Matrix im Gleichgewicht x_0
mit **negativen** reellen Teilen.
 n **Eigenvektoren**, die diesen Eigenwerten entsprechen,
definieren einen n -dimensionalen **linearen** Unterraum U^n .
 - ▷ Jede Trajektorie **linearisierter** Gleichungen, die im U^n anfängt, endet in x_0 .
(*und sollte damit dessen stabilen Mannigfaltigkeit gehören*).
 - ▷ Jede Trajektorie **linearisierter** Gleichungen, die außerhalb U^n anfängt,
führt schließlich weg vom Gleichgewicht x_0 .
(*und sollte damit dessen stabilen Mannigfaltigkeit **nicht** gehören*).
- ⇒ Auch bei dem ursprünglichen **nichtlinearisierten** System sollte die stabile Mannigfaltigkeit (zumindest in der Nähe von x_0) **n -dimensional** sein.



Invariante Mannigfaltigkeiten

Dynamisches System N -er Ordnung: $dx/dt = F(x)$, $x \in \mathcal{R}^N$,
mit einem *hyperbolischen* Gleichgewicht im Ursprung: $F_i(0) = 0 \quad \forall i$.

Wir teilen alle Eigenwerte λ von der Jacobi-Matrix in zwei Gruppen:

- ▷ n Eigenwerten mit $\operatorname{Re}(\lambda) < 0$ ($0 \leq n \leq N$);
Eigenvektoren definieren einen n -dim. linearen Unterraum E^n ,
- ▷ p Eigenwerten mit $\operatorname{Re}(\lambda) > 0$ ($0 \leq p \leq N$);
Eigenvektoren definieren einen p -dim. linearen Unterraum E^p .

es gilt $n + p = N$.

- ▷ **Satz:** Stabile Mannigfaltigkeit W^s des Gleichgewichts:
a) existiert; b) hat Dimension n ; c) ist genauso glatt wie F , und
d) tangiert am Gleichgewicht den linearen Raum E^n .
- ▷ **Satz:** Instabile Mannigfaltigkeit W^u des Gleichgewichts:
a) existiert; b) hat Dimension p ; c) ist genauso glatt wie F , und
d) tangiert am Gleichgewicht den linearen Raum E^p .

Invariante Mannigfaltigkeiten: Bestimmung

Beispiel: Dynamisches System 2.Ordnung mit einem **Sattelpunkt** im Ursprung:
 $dx/dt = f(x, y), \quad dy/dt = g(x, y); \quad f(0, 0) = g(0, 0) = 0.$

- ▷ da $n = p = 1$, sind W^s und W^u beide 1-dimensional (*kurvenförmig*).
Wo liegen sie in der Phasenebene?
- ▷ z.B. stabile Mannigfaltigkeit W^s :
eine Kurve, die im Ursprung den Eigenvektor tangiert,
der dem negativen Eigenwert der Jacobi-Matrix entspricht.
- ▷ Als eine Linie, kann W^s (**lokal !**) durch eine Koordinate parametrisiert werden,
z.B. durch x : $y = h(x)$ mit unbekannter Fkn. $h(x)$.
- ▷ Substitution in die 2.Gleichung + Kettenregel ergeben

$$h'(x) f(x, h(x)) = g(x, h(x)),$$

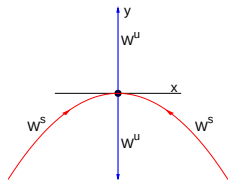
eine gewöhnliche DGL bezüglich der Funktion $h(x)$.

- ▷ Falls jedoch der entsprechende Eigenvektor **orthogonal** zur x -Achse steht,
dann muss die Parametrisierung durch y gewählt werden: $x = g(y)$ mit unbekannter Fkn. $g(y)$.
- ▷ Explizit ist diese Gleichung meist nicht lösbar,
aber sukzessiv kann man $h(x)$ (bzw. $g(y)$) durch die Potenzreihe bestimmen.

Invariante Mannigfaltigkeiten: Bestimmung

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -x \\ \dot{y} &= y + x^2\end{aligned}$$

- ▷ Gleichgewicht im Ursprung. Eigenwerte: 1 and -1 . Eigenvektoren: Achsen.
- ▷ Stabile Mannigfaltigkeit W^s tangiert im Ursprung die x -Achse.
Instabile Mannigfaltigkeit W^u tangiert im Ursprung die y -Achse.
- ▷ Stabile Mannigfaltigkeit: $y = h(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots$
(Lage vom Gleichgewicht: $a_0 = 0$, Richtung vom Eigenvektor: $a_1 = 0$).
- ▷ Einsetzen in $h'\dot{x} = \dot{y} = h(x) + x^2$
- ▷ $\Rightarrow a_2 = -1/3, a_3 = a_4 = \dots = 0$
- ▷ Stabile Mannigfaltigkeit: $y = -\frac{x^2}{3}$.
- ▷ Instabile Mannigfaltigkeit (in diesem Fall trivial): y -Achse $x = 0$.





Invariante Mannigfaltigkeiten: Bestimmung

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -x + by^2 \\ \dot{y} &= y + x^2\end{aligned}$$

- ▶ Gleichgewicht im Ursprung. Eigenwerte: 1 and -1 . Eigenvektoren: Achsen.
- ▶ Stabile Mannigfaltigkeit W^s tangiert im Ursprung die x -Achse.
Instabile Mannigfaltigkeit W^u tangiert im Ursprung die y -Achse.
- ▶ Stabile Mannigfaltigkeit: $y = h(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots$
(Lage vom Gleichgewicht: $a_0 = 0$, Richtung vom Eigenvektor: $a_1 = 0$).
- ▶ Einsetzen in $h'\dot{x} = \dot{y} = h(x) + x^2$
- ▶ $\Rightarrow a_2 = -1/3, a_3 = a_4 = a_6 = a_7 = 0$, aber $a_5 = -b/81, a_8 = -b^2/72$.
- ▶ Stabile Mannigfaltigkeit: $y = -\frac{x^2}{3} - \frac{bx^5}{81} - \frac{b^2x^8}{729} \dots$
- ▶ Instabile Mannigfaltigkeit: $x = 0 + \frac{by^2}{3} - \frac{b^3y^5}{81} + \frac{b^5y^8}{729} \dots$

