

Vorlesung 7.

Bifurkationen II: Zentrumsmannigfaltigkeit. Normalformen.





Auf den ersten Blick können die Bifurkationen in jedem dynamischen System anders aussehen.

1. Als eine qualitative Veränderung vom Phasenportrait gilt z.B. sowohl die **Änderung an der Anzahl von den Gleichgewichten** wie auch deren **Stabilitätsverlust**.

Sind es zwei unterschiedliche Arten von Bifurkationen, oder sind sie miteinander verbunden?

2. Welche Rolle spielt Dimension des Phasenraums?

Gibt es z.B. Unterschiede bei den Bifurkationen von Gleichgewichten in den Systemen 2., 22. und 222. Ordnung?

3. Anwesenheit einer Bifurkation erkennen wir an dem Verhalten von Eigenwerten ($\text{Re}(\lambda)=0$), also an der Linearisierung.

Welche Rolle, wenn überhaupt, spielen die Nichtlinearitäten, wie werden sie berücksichtigt?

Kann man die Taylor-Reihe „beschneiden“ ohne Änderungen bei der Dynamik, und falls ja, wo?



Es stellt sich heraus,
dass es bei den Bifurkationen von Gleichgewichten
gar nicht so viele Varianten gibt.

1. **Dimensionsreduktion:** Zentrumsmanigfaltigkeitssatz verwandelt die nötige Dimension des Phasenraums in 1 oder 2.
2. **Komplexitätsreduktion:**
es gibt (nichtlineare) Transformationen der Koordinaten,
bei welchen die meisten nichtlinearen Summanden der Taylorreihe
identisch verschwinden.

Das, was von der Taylorreihe übrig bleibt, heißt **Normalform**.
Nur sie muss schließlich analysiert werden.



Invariante Mannigfaltigkeiten

- ▷ **Stabile Mannigfaltigkeit** W^s eines Gleichgewichts $\mathbf{x}_0$:
Gesamtheit aller Anfangspunkten $\mathbf{x}$ von Trajektorien,
die bei $t \rightarrow \infty$ gegen $\mathbf{x}_0$ streben: $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0$.
(bei einem asymptotisch stabilen Gleichgewicht: W^s gleich Einzugsgebiet).
 - ▷ **Instabile Mannigfaltigkeit** W^u eines Gleichgewichts $\mathbf{x}_0$:
Gesamtheit aller Anfangspunkten $\mathbf{x}$ von Trajektorien,
die bei $t \rightarrow -\infty$ gegen $\mathbf{x}_0$ streben: $\lim_{t \rightarrow -\infty} \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0$.
(bei einem asymptotisch stabilen Gleichgewicht: W^u ist nur $\mathbf{x}_0$ selbst).
- Beide sind offensichtlich *invariant*:
jeder Punkt auf einer Bahn, die bei $t \rightarrow \infty$ gegen $\mathbf{x}_0$ strebt, gehört zu W^s
jeder Punkt auf einer Bahn, die bei $t \rightarrow -\infty$ gegen $\mathbf{x}_0$ strebt, gehört zu W^u .



Invariante Mannigfaltigkeiten

Wir **linearisieren** die Gleichungen in der Umgebung des Gleichgewichts x_0 .
(*hinreichend nah, gibt es kaum Unterschiede in der Dynamik*).

- ▷ Sei n Anzahl von Eigenwerten der Jacobi-Matrix im Gleichgewicht x_0 mit **negativen** reellen Teilen.
 n **Eigenvektoren**, die diesen Eigenwerten entsprechen,
definieren einen n -dimensionalen **linearen** Unterraum U^n .
 - ▷ Jede Trajektorie **linearisierter** Gleichungen, die im U^n anfängt, endet in x_0 .
(*und sollte damit dessen stabilen Mannigfaltigkeit gehören*).
 - ▷ Jede Trajektorie **linearisierter** Gleichungen, die außerhalb U^n anfängt, führt schließlich weg vom Gleichgewicht x_0 .
(*und sollte damit dessen stabilen Mannigfaltigkeit **nicht** gehören*).
- ⇒ Auch bei dem ursprünglichen **nichtlinearisierten** System sollte die stabile Mannigfaltigkeit (zumindest in der Nähe von x_0) **n -dimensional** sein.



Invariante Mannigfaltigkeiten

Dynamisches System N -ter Ordnung: $dx/dt = F(x)$, $x \in \mathcal{R}^N$,
mit einem **hyperbolischen** Gleichgewicht im Ursprung: $F_i(0) = 0 \quad \forall i$.

Wir teilen alle Eigenwerte λ von der Jacobi-Matrix in **zwei** Gruppen:

- ▷ n Eigenwerten mit $\operatorname{Re}(\lambda) < 0$ ($0 \leq n \leq N$);
Eigenvektoren definieren einen n -dim. linearen Unterraum E^n ,
- ▷ p Eigenwerten mit $\operatorname{Re}(\lambda) > 0$ ($0 \leq p \leq N$);
Eigenvektoren definieren einen p -dim. linearen Unterraum E^p .

$$n + p = N.$$

- ▷ **Satz**: Stabile Mannigfaltigkeit W^s des Gleichgewichts:
a) existiert; b) hat Dimension n ; c) tangiert am Gleichgewicht den Raum E^n .
- ▷ **Satz**: Instabile Mannigfaltigkeit W^u des Gleichgewichts:
a) existiert; b) hat Dimension p ; c) tangiert am Gleichgewicht den Raum E^p .
- ▷ So weit so gut. Aber beim Verlust der Stabilität eines Gleichgewichtes gilt $\operatorname{Re}(\lambda)=0$: das System wird **nicht**-hyperbolisch!

Zwecks Beschreibung der Bifurkationen muss das Bild erweitert werden.



Invariante Mannigfaltigkeiten

Dynamisches System N -ter Ordnung: $dx/dt = F(x)$, $x \in \mathcal{R}^N$,
mit einem **nicht-hyperbolischen** Gleichgewicht im Ursprung: $F_i(0) = 0 \quad \forall i$.

Wir teilen alle Eigenwerte λ von der Jacobi-Matrix in **drei** Gruppen:

- ▷ **n** Eigenwerten mit $\text{Re}(\lambda) < 0$ ($0 \leq n \leq N$);
Eigenvektoren definieren einen **n** -dim. linearen Unterraum E^n ,
- ▷ **p** Eigenwerten mit $\text{Re}(\lambda) > 0$ ($0 \leq p \leq N$);
Eigenvektoren definieren einen **p** -dim. linearen Unterraum E^p ,
- ▷ **z** Eigenwerten mit $\text{Re}(\lambda) = 0$ ($0 \leq z \leq N$);
Eigenvektoren definieren einen **z** -dim. linearen Unterraum E^z .

$$n + p + z = N.$$

- ▷ **Satz:** Stabile Mannigfaltigkeit W^s des Gleichgewichts:
a) existiert; b) hat Dimension n ; c) tangiert am Gleichgewicht den Raum E^n .
- ▷ **Satz:** Instabile Mannigfaltigkeit W^u des Gleichgewichts:
a) existiert; b) hat Dimension p ; c) tangiert am Gleichgewicht den Raum E^p .
- ▷ **Satz:** Zentrumsmannigfaltigkeit W^z des Gleichgewichts:
a) existiert; b) hat Dimension z ; c) tangiert am Gleichgewicht den Raum E^z .
... und ist nicht unbedingt eindeutig ...



Invariante Mannigfaltigkeiten

- ▷ **Stabile Mannigfaltigkeit** W^s eines Gleichgewichts $\mathbf{x}_0$:
Gesamtheit aller Anfangspunkten $\mathbf{x}$ von Trajektorien,
die bei $t \rightarrow \infty$ gegen $\mathbf{x}_0$ streben: $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0$.
- ▷ **Instabile Mannigfaltigkeit** W^u eines Gleichgewichts $\mathbf{x}_0$:
Gesamtheit aller Anfangspunkten $\mathbf{x}$ von Trajektorien,
die bei $t \rightarrow -\infty$ gegen $\mathbf{x}_0$ streben: $\lim_{t \rightarrow -\infty} \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0$.

Beide sind offensichtlich **invariant**.

- ▷ Im Gegensatz zu W^s und W^u wird die **Zentrumsmanigfaltigkeit** W^z **nicht** durch die asymptotischen Eigenschaften bei $t \rightarrow \pm\infty$ definiert, sondern lediglich durch die Berührung am Gleichgewicht mit dem linearen Unterraum E^z und durch die Invarianz.
Die zeitliche Asymptotik (*Zum Gleichgewicht? Weg vom Gleichgewicht?*) muss man erst bestimmen!
- ▷ In diesem Sinne könnte man den Satz umformulieren:
es $\exists$ eine invariante z -dimensionale Mannigfaltigkeit
(*Zentrumsmanigfaltigkeit genannt*),
die am Gleichgewicht den linearen Unterraum E^z tangiert.



- ▷ Wir übergehen nun zu den neuen Koordinaten (Variablen), die sich in drei Gruppen aufteilen:

- a) n Koordinaten α_j aus dem linearen Unterraum E^n
- b) p Koordinaten β_j aus dem linearen Unterraum E^p
- c) z Koordinaten ζ_j aus dem linearen Unterraum E^z

- ▷ Dann nimmt das System folgende Form an:

$$\dot{\vec{\alpha}} = A \vec{\alpha} + \Phi_{\vec{\alpha}}(\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\zeta}) \quad (n \text{ Gleichungen})$$

$$\dot{\vec{\beta}} = B \vec{\beta} + \Phi_{\vec{\beta}}(\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\zeta}) \quad (p \text{ Gleichungen})$$

$$\dot{\vec{\zeta}} = C \vec{\zeta} + \Phi_{\vec{\zeta}}(\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\zeta}) \quad (z \text{ Gleichungen})$$

wo alle Funktionen $\Phi_{\vec{\alpha}}, \Phi_{\vec{\beta}}, \Phi_{\vec{\zeta}}$ **nichtlinear** sind

(d.h. verschwinden im Ursprung samt allen **ersten** partiellen Ableitungen),

alle Eigenwerte der $(n \times n)$ Matrix A **negative** reelle Teile haben,

alle Eigenwerte der $(p \times p)$ Matrix B **positive** reelle Teile haben,

und reelle Teile von allen Eigenwerten der $(z \times z)$ Matrix C **Null** sind.



Einem asymptotisch **stabilen** Gleichgewicht entspricht $p = z = 0$.

Beim **kritischen** Parameterwert gilt für z Eigenwerte: $\operatorname{Re}(\lambda) = 0$.

Dann verkürzt sich das System

$$\begin{aligned}\dot{\vec{\alpha}} &= A \vec{\alpha} + \Phi_{\vec{\alpha}}(\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\zeta}) \\ \dot{\vec{\beta}} &= B \vec{\beta} + \Phi_{\vec{\beta}}(\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\zeta}) \\ \dot{\vec{\zeta}} &= C \vec{\zeta} + \Phi_{\vec{\zeta}}(\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\zeta})\end{aligned}$$

auf

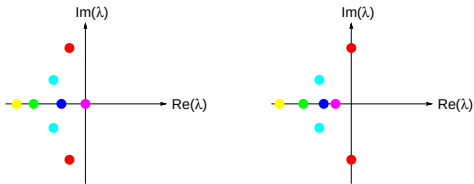
$$\begin{aligned}\dot{\vec{\alpha}} &= A \vec{\alpha} + \Phi_{\vec{\alpha}}(\vec{\alpha}, \vec{\zeta}) & (n \text{ Gleichungen}) \\ \dot{\vec{\zeta}} &= C \vec{\zeta} + \Phi_{\vec{\zeta}}(\vec{\alpha}, \vec{\zeta}) & (z \text{ Gleichungen})\end{aligned}$$

Die n Variablen $\vec{\alpha}$ entsprechen der stabilen Mannigfaltigkeit W^s .

Die z Variablen $\vec{\zeta}$ entsprechen der Zentrumsmannigfaltigkeit W^z .

Wegen den negativen Eigenwerten von A klingen die Variablen $\vec{\alpha}$ **schnell** ab,
und das System bewegt sich dann **langsam**
entlang der Zentrumsmannigfaltigkeit W^z .

In generischen parameterabhängigen dynamischen Systemen verschwindet bei Stabilitätsverlust eines Gleichgewichts reeller Teil von **einem** (reellen) oder **zwei** (komplex-konjugierten) Eigenwerten der Jacobi-Matrix.



Dementsprechend ist Zentrumsmannigfaltigkeit in diesen Fällen **ein-** bzw. **zweidimensional**.

Da die ganze „**langsame**“ Evolution vom Gesamtsystem ausschließlich entlang der Zentrumsmannigfaltigkeit stattfindet (alle andere Variablen passen sich relativ **schnell** an), reduziert sich das zulässige Verhalten beim Stabilitätsverlust auf **ein-** bzw. **zweidimensionale** Dynamik ...

... unabhängig von der Gesamtdimension vom Phasenraum.

Zentrumsmanigfaltigkeit: Bestimmung

Beispiel: Dynamisches System 2. Ordnung

mit einem **nichthyperbolischen** Gleichgewicht im Ursprung:

$$dx/dt = f(x, y), \quad dy/dt = g(x, y); \quad f(0, 0) = g(0, 0) = 0.$$

- ▷ bei $p = 0$, $n = z = 1$, sind W^s und W^z beide **1**-dimensional.
- ▷ Zentrumsmanigfaltigkeit W^z :
eine **invariante** Kurve, die im Ursprung **den** Eigenvektor tangiert,
der dem Eigenwert **0** der Jacobi-Matrix entspricht.
- ▷ Als eine Linie, kann W^z lokal durch eine Koordinate parametrisiert werden,
z.B. als $y = h(x)$ mit unbekannter Fkn. $h(x)$
- ▷ Methode, die wir durch die Bestimmung von W^s und W^u schon kennen:
Substitution in die 2. Gleichung und Kettenregel ergeben

$$h'(x)f(x, h(x)) = g(x, h(x)),$$

eine gewöhnliche DGL bezüglich der Funktion $h(x)$.

- ▷ Weiter sukzessiv mittels der Potenzreihe: $h(x) = h_1x + h_2x^2 + h_3x^3 \dots$
- ▷ Und schließlich Dynamik **auf der** W^z : $dx/dt = f(x, h(x))$.



Normalformen

- ▷ **Idee:** Koordinatentransformation (nichtlinear, lokal umkehrbar).
- ▷ **Ziel:** möglichst viele nichtlineare Summanden der Taylorreihe loswerden.

$$\dot{x} = ax + bx^2 + cx^3 + \dots \quad \Rightarrow \quad \dot{\tilde{x}} = a\tilde{x}$$

- ▷ **Mittel:** fast identische (*nearly identical*) Transformationen:

$$x \rightarrow \tilde{x} + \beta_2 \tilde{x}^2 + \beta_3 \tilde{x}^3 + \dots$$

- ▷ **Beispiel:**
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \lambda_1 x_1 \\ \dot{x}_2 = \lambda_2 x_2 + ax_1^3 \end{cases} \quad \begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix}$$
 (kubische Nichtlinearität)

$$\text{Transformation } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} : \quad \begin{cases} x_1 = y_1 \\ x_2 = y_2 + \frac{a}{3\lambda_1 - \lambda_2} y_1^3 \end{cases}$$

$$\text{Einsetzen in (1):} \quad \dot{y}_1 = \lambda_1 y_1$$

$$\text{Einsetzen in (2) links:} \quad \dot{y}_2 + \frac{3a y_1^2 \dot{y}_1}{3\lambda_1 - \lambda_2} = \dot{y}_2 + \frac{3a \lambda_1 y_1^3}{3\lambda_1 - \lambda_2}$$

$$\text{Einsetzen in (2) rechts:} \quad \lambda_2 y_2 + \lambda_2 \frac{a y_1^3}{3\lambda_1 - \lambda_2} + a y_1^3 = \lambda_2 y_2 + a y_1^3 \left(1 + \frac{\lambda_2}{3\lambda_1 - \lambda_2} \right)$$

$$(2)_{\text{links}} = (2)_{\text{rechts}} \quad \Rightarrow \quad \dot{y}_2 + a y_1^3 \frac{3\lambda_1}{3\lambda_1 - \lambda_2} = \lambda_2 y_2 + a y_1^3 \frac{3\lambda_1}{3\lambda_1 - \lambda_2}$$

Normalformen

▶ **Aufgabe:**
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \lambda_1 x_1 \\ \dot{x}_2 = \lambda_2 x_2 + a x_1^3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = y_1 \\ x_2 = y_2 + \frac{a}{3\lambda_1 - \lambda_2} y_1^3 \end{cases}$$

▶ **Ergebnis:**
$$\begin{cases} \dot{y}_1 = \lambda_1 y_1 \\ \dot{y}_2 = \lambda_2 y_2 \end{cases} \quad \text{Ziel erreicht !}$$

▶ **Frohe Botschaft:** es klappt **fast immer**:
 bei beliebigen Werten von a
 und **fast allen** Kombinationen von λ_1 und λ_2 .

▶ **Aber:** falls es mit **dieser** Transformation nicht klappt
 (also im entarteten Fall $\lambda_2 = 3\lambda_1$),
 dann auch mit **keiner** (!) anderen:
 dann ist der Summand mit x_1^3 prinzipiell unauslöschbar.

▶ **Beweis:** Satz vom **Poincaré** aus seiner Dissertation.





Die Jacobi-Matrix hat N (reelle und/oder komplex-konjugierte) Eigenwerte:

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N$$

Falls $\exists$ so ein i und so ein Satz von ganzzahligen nicht-negativen m_j , dass

$$\lambda_i = \sum_{j=1}^N m_j \lambda_j$$

(Ein Eigenwert gleich Superposition *aller* Eigenwerten
mit *ganzzahligen nicht-negativen* Koeffizienten)

dann nennt man die Jacobi-Matrix **resonant**.

Die (ganze) Zahl $k = \sum_{j=1}^N m_j$ mit $k \geq 2$ heißt **Ordnung der Resonanz**.

(der Fall $k = 1$, mit trivialem $m_j = \delta_{ij}$,
ist immer vorhanden und zählt nicht zu den Resonanzen.)

- ▷ **Poincaré**: Falls die Jacobi-Matrix eine Resonanz der Ordnung k aufweist, dann sind in der Gleichung Summanden der k .Ordnung mit **keiner** Transformation zu eliminieren.



▷ *Poincaré:*

Sind die Eigenwerte der Jacobi-Matrix am Gleichgewicht **nicht-resonant**, dann kann Dynamik in der Nähe von diesem Gleichgewicht durch eine **fast id.** Transformation auf lineare Gleichungen reduziert werden.

▷ Es geht sukzessiv:

zuerst wird eine Transformation gesucht, die **alle** Summanden **2.Ordnung** eliminiert (und dabei *möglicherweise* die höheren Ordnungen umformt),

dann eine weitere Transformation, die die **3.Ordnung** **komplett** eliminiert (und dabei die **2.Ordnung** nicht wieder erzeugt),

dann kommt die **4.Ordnung** an die Reihe, und so weiter.

▷ In Abwesenheit von **resonanten Eigenwerten** klappt dieses Verfahren immer.

▷ Es entscheiden also lediglich die Eigenwerte der Jacobi-Matrix, und damit **nur die linearen** Summanden der Differentialgleichung über Erfolg oder Mißerfolg;

Art und Struktur der (zu vernichtenden) **Nichtlinearität** spielen dabei **keine Rolle!**



Falls die Jacobi-Matrix eine Resonanz der Ordnung k aufweist,
dann sind in der Gleichung alle Summanden der k .Ordnung
mit **keiner** Transformation zu eliminieren.

Beispiel: das System $\begin{cases} \dot{x}_1 = \lambda_1 x_1 \\ \dot{x}_2 = \lambda_2 x_2 + a x_1^n \end{cases}$ kann bei allen $\lambda_2 \neq n\lambda_1$
auf ein lineares transformiert werden

- ▷ Bei der Entartung $\lambda_2 = n\lambda_1 \Rightarrow$ Resonanzordnung $k = n$
 $\Rightarrow$ sind Summanden n .Ordnung nicht eliminierbar.



Falls die Jacobi-Matrix eine Resonanz der Ordnung k aufweist,
dann sind in der Gleichung alle Summanden der k .Ordnung
mit **keiner** Transformation zu eliminieren.

Was bedeutet das für **nicht-hyperbolische Gleichgewichte**?

1. Ein reeller Eigenwert verschwindet.

Spektrum der Eigenwerte: $\lambda_1=0, \lambda_2, \dots, \lambda_N$.

Dann gilt $\forall j \in \{1, N\}$ und eine beliebige ganze Zahl m : $\lambda_j = \underbrace{m\lambda_1}_{0} + \lambda_j$.

Resonanzordnung k ($k = m + 1$) für alle $k \geq 2$

$\Rightarrow$ nichtlineare Summanden **aller** Ordnungen können **nicht** eliminiert werden.

2. Reeller Teil verschwindet bei **zwei** komplexen Eigenwerten.

Spektrum der Eigenwerte: $\lambda_1=i\omega, \lambda_2=-i\omega, \lambda_3, \dots, \lambda_N$.

Dann gilt $\forall j \in \{1, N\}$ und eine beliebige ganze Zahl m : $\lambda_j = \underbrace{m\lambda_1 + m\lambda_2}_{0} + \lambda_j$.

Resonanzordnung $2m + 1 \Rightarrow$ Nichtlinearitäten **aller ungeraden** Ordnungen
können **nicht** eliminiert werden.

*Trost: alle Summanden mit **geraden** Potenzen können **wegtransformiert** werden.*



In typischen (*generischen*) parameterabhängigen dynamischen Systemen verschwindet bei Stabilitätsverlust eines Gleichgewichts reeller Teil von **einem** oder von **zwei** Eigenwerten der Jacobi-Matrix.

Dimensionsreduktion (auf die **Zentrumsmanigfaltigkeit**) und Komplexitätsreduktion (zur **Normalform**)
reduzieren dabei die ganze Vielfalt auf **folgende zwei Fälle**:

- ▷ **Ein** reeller Eigenwert $\lambda=0$:
 - a) eindimensionale Zentrumsmannigfaltigkeit,
 - b) Normalform enthält Nichtlinearitäten aller Ordnungen
(die niedrigste anwesende dominiert und ist entscheidend).
- ▷ **Zwei** komplex-konjugierte Eigenwerte mit $\text{Re}(\lambda)=0$:
 - a) zweidimensionale Zentrumsmannigfaltigkeit,
 - b) Normalform enthält nur die Nichtlinearitäten ungerader Ordnungen
(schon die dritte Ordnung reicht meist).