

Vorlesung 8.

Bifurkationen III: Bifurkationen von Gleichgewichten





Lineare Stabilität

- ▷ $\dot{x}_i = f_i(\mathbf{x})$, $i = 1, \dots, N$. Gleichgewicht $\mathbf{x}_*$: $f_i(\mathbf{x}_*) = 0 \ \forall i$.
- ▷ Evolution kleiner Abweichungen $\xi_i \equiv x_i - x_{*i}$:

$$\dot{\xi}_i = \sum_{j=1, N}^N \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \xi_j + O(\|\xi\|^2), \text{ oder } \dot{\xi} = J \xi + O(\|\xi\|^2),$$

mit J - Jacobi-Matrix des Systems, am Punkt $\mathbf{x}_*$ berechnet.

- ▷ Linearisierung: $\dot{\xi}_i = \sum_{j=1, N}^N \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \xi_j$

– lineare DGL mit konstanten Koeffizienten.

Allgemeine Lösung: $\xi(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} + \dots + C_N e^{\lambda_N t}$;

λ_j ($j = 1, \dots, N$): Eigenwerte der Matrix J .

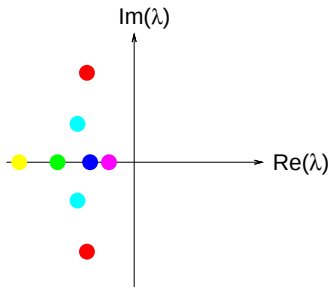
Für komplexe Eigenwerte $\lambda = \rho + i\omega$: $e^{\lambda t} = e^{\rho t} e^{i\omega t}$.

- ▷ Ausreichende Bedingung von Instabilität: $\exists j : \operatorname{Re}(\lambda_j) > 0$.

Für die Stabilität des Gleichgewichts ist es notwendig, dass

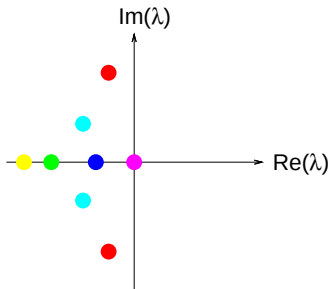
$$\operatorname{Re}(\lambda_j) \leq 0 \ \forall j$$

Eigenwertspektrum von Jacobi-Matrix



- ▷ Sei die rechte Seite des Systems eine stetige Funktion von einem **Kontrollparameter** μ .
- ▷ Dann sind auch die Eigenwerte der Jacobi-Matrix von μ abhängig, und ändern sich stetig zusammen mit μ .

Eigenwertspektrum von Jacobi-Matrix



- ▷ Sei die rechte Seite des Systems eine stetige Funktion von einem **Kontrollparameter** μ .
- ▷ Dann sind auch die Eigenwerte der Jacobi-Matrix von μ abhängig, und ändern sich stetig zusammen mit μ .
- ▷ Variation des Kontrollparameters kann **Stabilitätsverlust** verursachen.



- ▷ ein Gleichgewicht heißt **hyperbolisch**,
falls $\forall$ Eigenwerte λ_j seiner Jacobi-Matrix gilt: $\operatorname{Re}(\lambda_j) \neq 0$.
- ▷ Am **kritischen** Parameterwert:
Gleichgewicht verliert Hyperbolizität,
und dynamisches System wird **strukturell instabil**:
eine beliebig kleine Variation des Parameters
verändert Phasenportrait qualitativ.
- ▷ Das ist eine **Bifurkation**:
qualitativer Übergang in der **Struktur** des Phasenraums.

Bei der Bifurkation wird die lineare Analyse unzureichend:

Amplitude der **kritischen** Störungsmoden mit $\operatorname{Re}(\lambda)=0$
weder wächst noch schrumpft;
ihr Schicksal wird durch die Art der Nichtlinearität entschieden.
(Vgl. $\dot{x} = \lambda x + x^3$ und $\dot{x} = \lambda x - x^3$ bei $\lambda = 0$.)



*Dimension vom Phasenraum **und** Komplexität der rechten Seite können mithilfe von entsprechenden Werkzeugen auf das nötige Minimum reduziert werden.
Alle wesentliche dynamische Merkmale bleiben dabei erhalten.*

1. Dimension $\Rightarrow$ **Satz über die Zentrumsmannigfaltigkeit.**

Für die vollständige Analyse einer Bifurkation reicht es, einen invarianten Unterraum (**Zentrumsmannigfaltigkeit**) zu betrachten, mit der Dimension gleich der Anzahl von Eigenwerten der Jacobi-Matrix mit $\text{Re}(\lambda) = 0$.

▷ Es bleiben also *generisch* nur zwei Fälle:

A) **eindimensional**: $\lambda=0$ und B) **zweidimensional**: $\lambda = \pm i\omega$.

2. **Poincaré Normalformen**: es gibt (nichtlineare) Transformationen der Koordinaten, bei welchen die meisten nichtlinearen Summanden der Taylorreihe identisch verschwinden.

▷ Das, was von der Taylorreihe übrig bleibt, heißt **Normalform**.
Sie muss schließlich analysiert werden.

Graphische Darstellung: **Bifurkationsdiagramm**
(*Lage und Stabilität der Gleichgewichte als Funktion des Parameters*).



A. Reeller Eigenwert 0.

Allgemeine Normalform: $dx/dt = f(x, \mu)$.Gleichgewicht x_0 : $f(x_0, \mu) = 0$;dessen Stabilität: Vorzeichen von $\lambda = \partial f / \partial x|_{x=x_0}$ Verschiebung: $x \rightarrow x - x_0$ Bifurkationsbedingung: $f(0, 0) = \frac{\partial f(0, 0)}{\partial x} = 0$.(Gleichgewicht in $x=0$ und Bifurkation bei $\mu = 0$)

Taylor

($f(x, \mu)$ zerlegen, zuerst in die Potenzen von x , dann in die Potenzen von μ):

$$dx/dt = a_0(\mu) + a_1(\mu)x + a_2(\mu)x^2 + a_3(\mu)x^3 + \dots$$

$$\approx (a_{00} + b_0\mu) + (a_{10} + b_1\mu)x + (a_{20} + b_2\mu)x^2 + (a_{30} + b_3\mu)x^3 + \dots$$

$$= b_0\mu + b_1\mu x + (a_{20} + b_2\mu)x^2 + (a_{30} + b_3\mu)x^3 + \dots$$

Bei $a_{20} \neq 0$ kann man b_2 und Summanden mit x^n ($n > 2$) vernachlässigen.

$$\Rightarrow dx/dt = b_0\mu + b_1\mu x + a_{20}x^2$$

$$\triangleright \text{Transform: } x = -\frac{y}{a_{20}} - \frac{b_1\mu}{2a_{20}} \Rightarrow \frac{dy}{dt} = \underbrace{\mu \left(\frac{b_1^2\mu}{4} - a_{20}b_0 \right)}_{\text{new parameter } \bar{\mu}} - y^2 = \bar{\mu} - y^2$$



A. Reeller Eigenwert 0.

Allgemeine Normalform: $dx/dt = f(x, \mu)$.

Gleichgewicht x_0 : $f(x_0, \mu) = 0$;

dessen Stabilität: Vorzeichen von $\lambda = \partial f / \partial x|_{x=x_0}$.

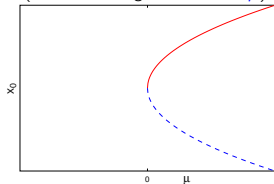
1. Normalform: $dx/dt = \mu - x^2$.

$$\text{Gleichgewichte: } \begin{cases} x_0 = \sqrt{\mu}, & \lambda = -2\sqrt{\mu} \leq 0 \\ x_0 = -\sqrt{\mu}, & \lambda = 2\sqrt{\mu} \geq 0 \end{cases}$$

- ▶ Gleichgewichte existieren nur bei $\mu \geq 0$;
bei negativen μ gibt es sie (lokal!) nicht.
- ▶ Bei $\mu = 0$ entsteht/stirbt ein Paar von Gleichgewichten:
je ein **stabiles** und ein **instabiles**.
Bei $\mu < 0$ gibt es im System keine lokale Attraktoren!
- ▶ Das ist eine „**Sattel-Knoten**“ Bifurkation
(**saddle-node**).

Sie wird auch manchmal **fold bifurcation** (**Falte**) genannt.

Bifurkationsdiagramm
(Nullstellenmenge als Fkn. von μ)

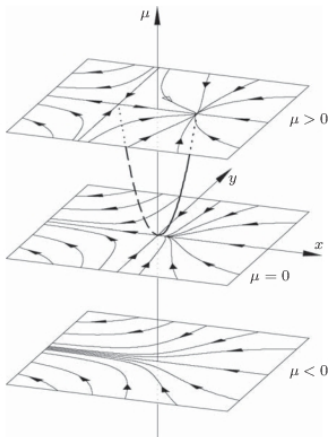




A. Reeller Eigenwert 0.

- ▷ Das ist eine „Sattel-Knoten“ Bifurkation (saddle-node).

Der Name entstammt allerdings dem Bild von einem 2-dimensionalen Phasenraum, z.B. $dx/dt = \mu - x^2$, $dy/dt = -y$:





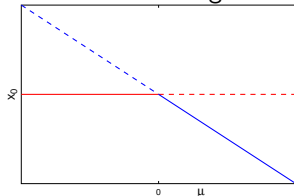
A. Reeller Eigenwert 0.

2. In manchen Anwendungen gibt es Gleichgewichte, die bei keinen Parameterwerten verschwinden dürfen (Beispiel: leere Population in der Populationsdynamik besteht *immer*).

$$\Rightarrow a_0(\mu) \equiv 0 \forall \mu \Rightarrow dx/dt = a_1(\mu)x + a_2(\mu)x^2 + \dots \quad \text{Bifurkationsdiagramm}$$

$$\text{Normalform: } dx/dt = \mu x + x^2.$$

$$\text{Gleichgewichte: } \begin{cases} x_0 = 0, & \lambda = \mu \\ x_0 = -\mu, & \lambda = -\mu \end{cases}$$



- ▷ Beide Gleichgewichte existieren bei allen Werten von μ .
- ▷ Bei $\mu=0$ „passieren“ sie durcheinander und tauschen dabei ihre Stabilität.
- ▷ Das ist eine „transkritische“ Bifurkation der Gleichgewichte.
(transcritical)



A. Reeller Eigenwert 0.

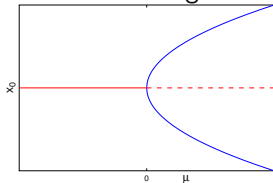
3. Anwendungen besitzen oft eine Spiegelsymmetrie $x \leftrightarrow -x$
 $\Rightarrow$ eine Normalform $dx/dt = f(x, \mu)$ darf in solchen Fällen
keine gerade Potenzen von x enthalten.

Normalform: $dx/dt = \mu x \pm x^3$.

- 3a Wir betrachten getrennt: $dx/dt = \mu x - x^3$.

$$\text{Gleichgewichte: } \begin{cases} x_0 = 0, & \lambda = \mu \\ x_0 = -\sqrt{\mu}, & \lambda = -2\mu \leq 0 \\ x_0 = \sqrt{\mu}, & \lambda = -2\mu \leq 0 \end{cases}$$

Bifurkationsdiagramm



- ▷ Gleichgewicht in Null existiert bei allen Werten von Kontrollparameter μ ;
es wechselt seine Stabilität beim Übergang über $\mu=0$.
Die beiden symmetrischen „Seiten“-Gleichgewichte existieren *nur* bei $\mu \geq 0$;
sie sind **stabil** im ganzen Parameterbereich deren Existenz.
- ▷ Das ist eine „**superkritische Heugabel**“-Bifurkation von Gleichgewichten
(**supercritical pitchfork**).



A. Reeller Eigenwert 0.

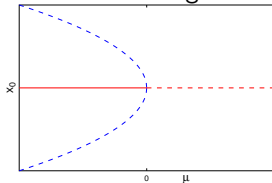
3. Anwendungen besitzen oft eine Spiegelsymmetrie $x \leftrightarrow -x$
 $\Rightarrow$ eine Normalform $dx/dt = f(x, \mu)$ darf in solchen Fällen
keine gerade Potenzen von x enthalten.

Normalform: $dx/dt = \mu x \pm x^3$.

- 3b Wir betrachten getrennt: $dx/dt = \mu x + x^3$.

$$\text{Gleichgewichte: } \begin{cases} x_0 = 0, & \lambda = \mu \\ x_0 = -\sqrt{-\mu}, & \lambda = -2\mu \geq 0 \\ x_0 = \sqrt{-\mu}, & \lambda = -2\mu \geq 0 \end{cases}$$

Bifurkationsdiagramm



- ▶ Gleichgewicht im Null existiert bei allen Werten von Kontrollparameter μ ;
es wechselt seine Stabilität beim Übergang über $\mu=0$.
Die beiden symmetrischen „Seiten“-Gleichgewichte existieren *nur* bei $\mu \leq 0$;
sie sind **instabil** im ganzen Parameterbereich deren Existenz.
- ▶ Das ist eine „subkritische Heugabel“-Bifurkation von Gleichgewichten
(subcritical pitchfork).