Übungen zur Nichtlinearen Dynamik, WS 2021/2022

Fragen zu den Übungen bitte an

PD Dr. M. Zaks
Newtonstr. 15, 3. Etage, Zi. 410
Tel.: 030 - 2093 7608
`zaks@physik.hu-berlin.de`

Blatt 2

Differentialgleichungen, Stabilität

1. Zeigen Sie, dass jede einzelne Lösung des Systems $\{\dot{x} = -t^2 x, \;\; \dot{y} = -t\, y\}$ asymptotisch stabil ist. (2 Pkt.)
   Hinweis: hier, ausnahmsweise, hilft direkte Lösung der Gleichungen.

2. Zeigen Sie, dass bei dem System
$$\begin{aligned} \dot{x} &= x\, P(x,y) \\ \dot{y} &= y\, Q(x,y) \end{aligned}$$
   der Ursprung ($x = y = 0$) asymptotisch stabil ist, falls in der Nachbarschaft des Ursprungs $P < 0$ und $Q < 0$ gilt. Benutzen Sie dabei **keine** Lyapunov-Funktionen! (3 Pkt.) *Hinweis: logarithmische Ableitung.*

3. Untersuchen Sie die Gleichgewichte des Systems
$$\begin{aligned} \dot{x} &= x - y - x(x^2+y^2) + \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \dot{y} &= x + y - y(x^2+y^2) - \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{aligned}$$
   auf Stabilität: (quasi-)asymptotisch und im Sinne von Lyapunov. (5 Pkt.)
   (Hinweis: benutzen Sie Polarkoordinaten, zeichnen Sie das Phasenportrait).

4. Formulieren Sie mathematisch (ε-δ-Notation) die Definition für die *orbitale Stabilität*. (3 Pkt.) *Achten Sie, dass jeder Punkt der gestörten Lösungskurve ε-nah zu irgendeinem Punkt der Referenzlösungskurve bleibt, und umgekehrt!*

5. Finden Sie die Lyapunov-Funktion für das System
$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y - x^3 \\ \dot{y} &= x^5\,, \end{aligned}$$
   und beweisen Sie damit die asymptotische Stabilität des Ursprungs! (3 Pkt.)

6. Für welche Werte von k dient $x^2 + ky^2$ als Lyapunov-Funktion für das System
$$\begin{aligned} \dot{x} &= -x + y - x^2 - y^2 + xy^2 \\ \dot{y} &= -y + xy - y^2 - x^2 y \;\; ? \end{aligned}$$
   Was besagt der Fall $k = 1$ über Stabilitätsbereich vom Ursprung? (4 Pkt.)

Abgabetermin: Mittag am Mittwoch 03.11.2021 für die **ersten vier** Aufgaben; Aufgaben 5 und 6: **Mittag am Mittwoch 10.11.2021**.