Übungen zur Nichtlinearen Dynamik, WS 2023/2024

Fragen zu den Übungen bitte an

Dr. M. Zaks
Newtonstr. 15, 3. Etage, Zi. 410
Tel.: 030 - 2093 7608 `zaks@physik.hu-berlin.de`

Blatt 5

Dynamik in der Phasenebene: periodische Lösungen

1. Zeigen Sie, dass ein zweidimensionales System, das durch ein rotationsfreies Vektorfeld

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} = \{x_1, x_2\}, \ \nabla \times \boldsymbol{F} = 0$$

beschrieben wird, keine periodische Lösungen besitzt.
Hinweis: Zweidimensionalität ist hier eigentlich unwichtig. Was folgt aus der Wirbelfreiheit?
(3 Pkt.)

2. Finden Sie alle Fixpunkte vom Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x\,(2 - y - x) \\ \dot{y} &= y\,(4x - x^2 - 3) \end{aligned}$$

für $x, y \geq 0$, untersuchen Sie sie auf Stabilität, und zeigen Sie, dass in diesem Bereich keine periodische Lösungen existieren. *Hinweis: benutzen Sie Dulac-Kriterium.* (3 Pkt.)

3. Beweisen Sie die Unmöglichkeit von periodischen Schwingungen bei einem nichtlinearen Oszillator mit koordinaten-abhängiger Reibung

$$\ddot{x} + \gamma(x)\,\dot{x} + f(x) = 0$$

mit $\gamma(x) > 0$ und $f(x)$ beliebige differenzierbare Fkn. (3 Pkt.)

4. Zeigen Sie mit Hilfe von Poincaré-Bendixson Kriterium, dass die Gleichungen

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y + \frac{1}{4}\,x\,(1 - 2x^2 - 2y^2) \\ \dot{y} &= -x + \frac{1}{2}\,y\,(1 - x^2 - y^2) \end{aligned}$$

mindestens einen *Grenzzyklus* (asymptotisch stabile periodische Lösung) besitzen.
Hinweis: Polarkoordinaten. (3 Pkt.)