Übungen zur Nichtlinearen Dynamik, WS 2023-2024

Fragen zu den Übungen bitte an

Dr. M. Zaks
Newtonstr. 15, 3. Etage, Zi. 410
`zaks@physik.hu-berlin.de`

Blatt 9

Lorenz-Gleichungen

1. Zeigen Sie, dass es im Phasenraum der Lorenz-Gleichungen

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \sigma\,(y-x)\\ \dot{y} &= r\,x - y - x\,z\\ \dot{z} &= x\,y - b\,z\end{aligned}$$

   immer - bei beliebigen positiven Werten von Kontrollparametern σ, r, b – ein beschränkter “anziehender” Bereich U existiert: keine Lösungen je verlassen U, und alle Lösungen mit Anfangsbedingungen außerhalb von U enden unverzüglich im U. *Hinweis: nehmen Sie für U eine passende Ellipsoide im Phasenraum; wählen Sie eine positive Funktion $F(x, y, z)$ so aus, dass es gilt $dF/dt < 0$ überall außerhalb von U.*

2. Bestimmen Sie den kritischen Parameter Wert $r = r_H$, bei welchem die nichttrivialen stationären Lösungen von Lorenz-Gleichungen ihre Stabilität verlieren. *Hinweis: Bilden Sie dazu die Jacobi-Matrix von einem dieser Gleichgewichten, schreiben Sie die charakteristische Gleichung dieser Matrix auf. Bei welchem Wert von r besitzt die letztere Gleichung zwei rein imaginären Lösungen?*

3. Dynamik eines Lasers kann unter Umständen auf 3 zeitabhängige Variablen $E.\,P$, D (E- elektrische Feldstärke, P - Polarisierung und D - Differenz zwischen Zahlen von Atomen bei zwei benachbarten Energielevels) reduziert werden. Die entsprechenden Differentialgleichungen lauten

$$\begin{aligned}\dot{E} &= -\alpha E + \beta P\\ \dot{P} &= -\gamma P + c\,E\,D\\ \dot{D} &= \Gamma(D_0 - D) - k\,E\,P\end{aligned}$$

   mit physikalischen Parametern α, β, γ, c, Γ, D_0, k. Finden Sie die Transformation, die diese Gleichungen auf die Lorenzgleichungen überführt.

Abgabe: 07.02.2024