

# Übungen zur Nichtlinearen Dynamik, WS 2024/2025

Fragen zu den Übungen bitte an

PD Dr. M. Zaks

Newtonstr. 15, 3. Etage, Raum 3'410

zaks@physik.hu-berlin.de

## Blatt 2

### Differentialgleichungen, Stabilität

1. Zeigen Sie, dass jede einzelne Lösung des Systems  $\{\dot{x} = -t^2x, \dot{y} = -ty\}$  asymptotisch stabil ist. (2 Pkt.)

*Hinweis: hier, ausnahmsweise, hilft direkte Lösung der Gleichungen.*

2. Zeigen Sie, dass bei dem System

$$\dot{x} = xP(x, y)$$

$$\dot{y} = yQ(x, y)$$

der Ursprung ( $x = y = 0$ ) asymptotisch stabil ist, falls in der Nachbarschaft des Ursprungs  $P < 0$  und  $Q < 0$  gilt. Benutzen Sie dabei **keine** Lyapunov-Funktionen! (3 Pkt.) *Hinweis: logarithmische Ableitung.*

3. Untersuchen Sie die Gleichgewichte des Systems

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x - y - x(x^2 + y^2) + \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ \dot{y} &= x + y - y(x^2 + y^2) - \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}\end{aligned}$$

auf Stabilität: (quasi-)asymptotisch und im Sinne von Lyapunov. (5 Pkt.)

(Hinweis: benutzen Sie Polarkoordinaten, zeichnen Sie das Phasenportrait).

4. Formulieren Sie mathematisch ( $\varepsilon$ - $\delta$ -Notation) die Definition für die *orbitale Stabilität*. (3 Pkt.) *Achten Sie, dass jeder Punkt der gestörten Phasenbahn  $\varepsilon$ -nah zu irgendeinem Punkt der Referenzphasenbahn bleibt, und umgekehrt!*

- 
5. Finden Sie die Lyapunov-Funktion für das System

$$\dot{x} = -y - x^3$$

$$\dot{y} = x^5,$$

und beweisen Sie damit die asymptotische Stabilität des Ursprungs! (3 Pkt.)

Hinweis: Hier findet man  $\dot{V}=0$  nicht nur im Gleichgewicht. Da hilft das sogenannte "Invariance principle": im Bereich mit einer Lyapunov-Fkt. ist die Grenzmenge jeder Trajektorie bei  $t \rightarrow \infty$  eine invariante Menge in diesem Bereich.

6. Für welche Werte von  $k$  dient  $x^2 + ky^2$  als Lyapunov-Funktion für das System

$$\dot{x} = -x + y - x^2 - y^2 + xy^2$$

$$\dot{y} = -y + xy - y^2 - x^2y ?$$

Was besagt der Fall  $k = 1$  über Stabilitätsbereich vom Ursprung? (4 Pkt.)

**Abgabetermin: Mittwoch 30.10.2024, 11:59** für die **ersten vier** Aufgaben;  
Aufgaben 5 und 6: **Mittag am Mittwoch 06.11.2021.**