

Übungen zur Nichtlinearen Dynamik, WS 2024 / 2025

Fragen zu den Übungen bitte an

PD Dr. M. Zaks

Newtonstr. 15, 3. Etage, Zi. 410

zaks@physik.hu-berlin.de

Blatt 3

Ruhelagen bei niedrigdimensionaler Dynamik

1. Dynamik auf einer Linie

Für die Differentialgleichungen

a) $\dot{x} = x - x^2$,

b) $\dot{u} = -u + 4u^3 - u^5$,

c) $\dot{x} = \begin{cases} 0, & \text{falls } x = 0 \\ -x^3 \sin(1/x), & \text{falls } x \neq 0 \end{cases}$

finden Sie alle Gleichgewichte und linearisieren Sie sie in der Nähe dieser Gleichgewichte. Welche davon sind stabil und welche instabil? Skizzieren Sie die Phasenportraits. (5 Pkt.)

2. Anzahl der Gleichgewichte.

Zu jedem Fall unten geben Sie entweder Beispiel einer Gleichung $\dot{x} = f(x)$ an, die diesem Fall entspricht, oder erklären Sie, warum es solche Beispiele nicht gibt.

a) Jede reelle Zahl ist eine Ruhelage;

b) Alle ganze Zahlen sind Gleichgewichte, und es gibt keine andere;

c) Es gibt exakt drei Fixpunkte, alle davon asymptotisch stabil;

d) Es gibt keine Gleichgewichte;

e) Es gibt exakt 2024 Gleichgewichte.

(5 Pkt.)

3. Gleichgewichte auf der Phasenebene

Bei einem dynamischen System

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 - y - 1 \\ \dot{y} = (x - 2)y \end{cases}$$

finden Sie alle Gleichgewichte und bestimmen Sie deren Typen. (5 Pkt.)

Zusatzaufgabe: Betrachten Sie die Geraden durch jedes Paar der gefundenen Gleichgewichte und zeigen Sie, dass jede von diesen Geraden invariant ist. Davon ausgehend, diskutieren Sie die Abwesenheit von periodischen Lösungen (geschlossenen Phasenbahnen) auf der Phasenebene von diesem System. (5 Pkt.)

Abgabetermin: Mittag am Mittwoch 13.11.2024