

Übungen zur Nichtlinearen Dynamik, Sommersemester 2026

Fragen zu den Übungen bitte an

PD Dr. M. Zaks

Newtonstr. 15, 3. Etage, Raum 3'410

zaks@physik.hu-berlin.de

Blatt 2

Differentialgleichungen, Stabilität

1. Zeigen Sie, dass jede einzelne Lösung des Systems $\{\dot{x} = -t^2x, \dot{y} = -ty\}$ asymptotisch stabil ist. (2 Pkt.)

Hinweis: hier, ausnahmsweise, hilft direkte Lösung der Gleichungen.

2. Zeigen Sie, dass bei dem System

$$\dot{x} = xP(x, y)$$

$$\dot{y} = yQ(x, y)$$

der Ursprung ($x = y = 0$) asymptotisch stabil ist, falls in der Nachbarschaft des Ursprungs $P < 0$ und $Q < 0$ gilt. Benutzen Sie dabei **keine** Lyapunov-Funktionen! (3 Pkt.) *Hinweis: logarithmische Ableitung.*

3. Untersuchen Sie die Gleichgewichte des Systems

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x - y - x(x^2 + y^2) + \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ \dot{y} &= x + y - y(x^2 + y^2) - \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}\end{aligned}$$

auf Stabilität: (quasi-)asymptotisch und im Sinne von Lyapunov. (5 Pkt.)
(Hinweis: benutzen Sie Polarkoordinaten, zeichnen Sie das Phasenportrait).

4. Formulieren Sie mathematisch (ε - δ -Notation) die Definition für die *orbitale Stabilität*. (3 Pkt.) *Achten Sie, dass jeder Punkt der gestörten Phasenbahn ε -nah zu irgendeinem Punkt der Referenzphasenbahn bleibt, und umgekehrt!*

-
5. Finden Sie die Lyapunov-Funktion für das System

$$\dot{x} = -y - x^3$$

$$\dot{y} = x^5,$$

und beweisen Sie damit die asymptotische Stabilität des Ursprungs! (3 Pkt.)

Hinweis: Hier findet man $\dot{V}=0$ nicht nur im Gleichgewicht. Da hilft das sogenannte "Invariance principle":
im Bereich mit einer Lyapunov-Fkt. ist die Grenzmenge jeder Trajektorie bei $t \rightarrow \infty$ eine invariante Menge in diesem Bereich.

6. Für welche Werte von k dient $x^2 + ky^2$ als Lyapunov-Funktion für das System

$$\dot{x} = -x + y - x^2 - y^2 + xy^2$$

$$\dot{y} = -y + xy - y^2 - x^2y \quad ?$$

Was besagt der Fall $k = 1$ über Stabilitätsbereich vom Ursprung? (4 Pkt.)

Abgabetermin: Mittwoch 29.04.2026, 14:00 für die **ersten vier** Aufgaben;
Aufgaben 5 und 6: **Mittwoch 06.05.2026.**