

Übungen zur Nichtlinearen Dynamik, Sommersemester 2026

Fragen zu den Übungen bitte an

Dr. M. Zaks

Newtonstr. 15, 3. Etage, Zi. 410

zaks@physik.hu-berlin.de

Blatt 8

Lorenz-Gleichungen

1. Zeigen Sie, dass es im Phasenraum der Lorenz-Gleichungen

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \sigma(y - x) \\ \dot{y} &= rx - y - xz \\ \dot{z} &= xy - bz\end{aligned}$$

bei beliebigen positiven Werten von Kontrollparametern σ, r, b immer ein beschränkter “anziehender” Bereich U existiert: keine Lösungen je verlassen U , und alle Lösungen mit Anfangsbedingungen außerhalb von U enden unverzüglich im U .

Hinweis: nehmen Sie für U eine passende Ellipsoide im Phasenraum; wählen Sie eine positive Funktion $F(x, y, z)$ so aus, dass $dF/dt < 0$ überall außerhalb von U gilt.

2. Bestimmen Sie den kritischen Parameter Wert $r = r_{\text{AH}}$, bei welchem die nichttrivialen stationären Lösungen von Lorenz-Gleichungen ihre Stabilität verlieren.

Hinweis: Bilden Sie dazu die Jacobi-Matrix von einem dieser Gleichgewichten, schreiben Sie die charakteristische Gleichung dieser Matrix auf. Bei welchem Wert von r besitzt die letztere Gleichung zwei rein imaginären Lösungen?

3. Dynamik eines Lasers kann unter Umständen auf 3 zeitabhängige Variablen E, P, D (E - elektrische Feldstärke, P - Polarisierung und D - Differenz zwischen Zahlen von Atomen bei zwei benachbarten Energielevels) reduziert werden. Die entsprechenden Differentialgleichungen lauten

$$\begin{aligned}\dot{E} &= -\alpha E + \beta P \\ \dot{P} &= -\gamma P + c E D \\ \dot{D} &= \Gamma(D_0 - D) - k E P\end{aligned}$$

mit physikalischen Parametern $\alpha, \beta, \gamma, c, \Gamma, D_0, k$. Finden Sie die Transformation, die diese Gleichungen auf die Lorenzgleichungen überführt.

Abgabe: 24.06.2026 um 15:00