

Mathematische Grundlagen

Übungsblatt 6 – Lösungen

Aufgaben mit ♡ sind Liebhaberstücke, ihre Lösung ist nicht nötig zum Verständnis der "Mathematischen Grundlagen".

- $|z| = 2\sqrt{3}, \varphi = 5\pi/6$ (nicht $-\pi/6$ wg. $\operatorname{Re} z < 0!$)
 - $24\sqrt{3}e^{5\pi i/2}$
 - $(1/12)e^{-5\pi i/3}$
 - $\sqrt[3]{2}\sqrt[6]{3}e^{5\pi i/18+2\pi ik/3}, k = 0, 1, 2$ ($5\pi/18 = 50^\circ$)
- $1 - \tan^2 \alpha + 2i \tan \alpha$
 - $z = \sqrt{1 + \tan^2 \alpha}e^{i\alpha}$
 $z^2 = (1 + \tan^2 \alpha)e^{2i\alpha}$

Übereinstimmung ist knifflig – am besten $\tan \alpha = \sin \alpha / \cos \alpha$ ersetzen und beide auf die Form $z^2 = e^{2i\alpha} / \cos^2 \alpha$ bringen.

- Mit Additionstheorem:

$$x = \frac{\alpha + \beta}{2} \quad y = \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos(x + y) - \cos(x - y) = -2 \sin x \sin y \quad \text{ok}$$

Exponentiell: am besten mit der rechten Seite anfangen und ausmultiplizieren.

- ♡

$$\begin{aligned} \operatorname{arsinh}(-x) &= \log(-x + \sqrt{x^2 + 1}) \\ &= \log \frac{(-x + \sqrt{x^2 + 1})(x + \sqrt{x^2 + 1})}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \\ &= \log \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \\ &= -\operatorname{arsinh} x \end{aligned}$$

- ♡

$$\begin{aligned} z &= \cosh \alpha \cos \varphi + i \sinh \alpha \sin \varphi \\ \Rightarrow x &= a \cos \varphi \quad a = \cosh \alpha \\ y &= b \sin \varphi \quad b = \sinh \alpha \\ &(x/a)^2 + (y/b)^2 = 1 \end{aligned}$$

Ellipse mit Halbachsen a, b und Brennpunkten bei ± 1 .