Dr. B. Bunk WS 2014/15

Mathematische Grundlagen

Übungsblatt 8 – Lösungen

1. (a) konvergent: $1/k^2$ ist Majorante
   (b) konvergent: $1/(\log k)$ ist monotone Nullfolge (Leibnitz)
   (c) divergent: $1/\sqrt{k} > 1/k$, harmonische Reihe divergiert
   (d) konvergent: Quotientenkriterium gilt mit einem $1/2 < q < 1$ (je nachdem, ab welchem k der Quotient betrachtet wird)

2. (a) $y' = \dfrac{1+x^2}{3x^{2/3}} + 2x^{4/3}$
   (b) $y' = 6\sin(3x)\cos(3x) = 3\sin(6x)$
   (c) $y' = -\dfrac{\sin x \cos x}{\sqrt{1+\cos^2 x}}$

3. (a) $\left(\dfrac{\sin x}{\cos x}\right)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
   (b) $\left(\dfrac{\sinh x}{\cosh x}\right)' = \dfrac{1}{\cosh^2 x}$

4. ♡

$$\begin{aligned}
\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k\log k} &= \sum_{l=1}^{\infty} u_l \\
\text{mit} \quad u_l &= \sum_{k=2^l}^{2^{l+1}-1} \frac{1}{k\log k} \\
u_l &\geq \frac{2^l}{2^{l+1}\log(2^{l+1})} = \frac{1}{2(l+1)\log 2} \sim \frac{1}{l+1}
\end{aligned}$$

divergent, denn u_l majorisiert die (divergente) harmonische Reihe.
Mit $\alpha > 1$ entsteht Konvergenz (wg. Majorante $\sum_k k^{-\alpha}$):

$$u_l \leq \frac{2^l}{2^l[\log(2^l)]^\alpha} = \frac{1}{[\log(2^l)]^\alpha} = \frac{1}{[l\log 2]^\alpha} \sim \frac{1}{l^\alpha}$$