Dr. B. Bunk WS 2014/15

Mathematische Grundlagen

Übungsblatt 9

1. Wir gehen aus von der Funktion $y = f(x) = x + \sqrt{x^2+1}$.
   (a) Berechnen Sie die Umkehrfunktion $x = g(y)$ für $y > 0$.
   (b) Bilden Sie die Ableitungen von Funktion und Umkehrfunktion.
   (c) Kontrollieren Sie die Ableitungen mit Hilfe der Relation $f'(x)\,g'(y) = 1$.

2. Bilden Sie von der Funktion

$$f(r,\varphi) \quad = \quad e^{r\cos\varphi}$$

   alle ersten und zweiten partiellen Ableitungen.
   Überzeugen Sie sich, dass die gemischte zweite Ableitung nicht von der Reihenfolge der Differentiationen abhängt.

3. Berechnen Sie die unbestimmten Integrale
   (a) $\displaystyle\int dt\,\sin at$
   (b) $\displaystyle\int dx\,\frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}$
   (c) $\displaystyle\int dt\,\frac{2t}{1-t^2}$
   (d) $\displaystyle\int dx\,x^2\log x$

4. ♡ Wie *sieht* man *ohne Rechnung*:
   (a) $\displaystyle\int_{-1}^{1} dx\,xe^{-x^2} = 0$
   (b) $\displaystyle\int_0^{\pi} d\phi\,\frac{\cos\phi}{1+\sin\phi} = 0$

Aufgaben mit ♡ sind für Liebhaber, ihre Lösung ist nicht nötig zum Verständnis der "Mathematischen Grundlagen".

Ableitungen elementarer Funktionen

Wenn nicht anders angegeben, ist $x, a \in \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{Z}$.

$f(x)$	$f'(x)$	
x^a	$a\,x^{a-1}$	$x > 0$ oder $a \in \mathbb{N}$
a^x	$\log a\, a^x$	$a > 0$
e^x	e^x	
$\log \lvert x \rvert$	$\frac{1}{x}$	$x \neq 0$
$\sin x$	$\cos x$	
$\cos x$	$-\sin x$	
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$x \neq (k + \frac{1}{2})\pi$
$\cot x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$	$x \neq k\pi$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\lvert x \rvert < 1$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\lvert x \rvert < 1$
$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$	
$\operatorname{arccot} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$	
$\sinh x$	$\cosh x$	
$\cosh x$	$\sinh x$	
$\tanh x$	$\frac{1}{\cosh^2 x}$	
$\coth x$	$-\frac{1}{\sinh^2 x}$	$x \neq 0$
$\operatorname{arsinh} x$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	
$\operatorname{arcosh} x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$x > 1$
$\operatorname{artanh} x$	$\frac{1}{1-x^2}$	$\lvert x \rvert < 1$
$\operatorname{arcoth} x$	$\frac{1}{1-x^2}$	$\lvert x \rvert > 1$