Dr. B. Bunk WS 2014/15

Mathematische Grundlagen

Vorlesung 1 – Notizen

1 Elementares

1.1 Algebraische Umformungen

Wir setzen als bekannt voraus:

- Ausmultiplizieren und Ausklammern von polynomischen Ausdrücken
- Kürzen in rationalen Funktionen

1.2 Potenzen und Logarithmen

Potenzgesetze (z.B. für $a, b > 0$):

$$\begin{aligned} a^p a^q &= a^{p+q} \\ a^p b^p &= (ab)^p \\ (a^p)^q &= a^{pq} \\ a^{-p} &= 1/a^p \\ a^0 &= 1 \\ \sqrt[n]{a} &= a^{1/n} \end{aligned}$$

Logarithmen:

$$\begin{aligned} a^x &= y \\ \Leftrightarrow \quad x &= \log_a y \end{aligned}$$

Regeln:

$$\begin{aligned} \log_a(xy) &= \log_a x + \log_a y \\ \log_a(x/y) &= \log_a x - \log_a y \\ \log_a(x^p) &= p \log_a x \\ \log_b y &= \log_a y / \log_a b \end{aligned}$$

Euler–Zahl e, Exponentialfunktion, natürlicher Logarithmus:

$$\begin{aligned} e^x &= b \\ \Leftrightarrow \quad x &= \log b \equiv \ln b \end{aligned}$$

1.3 Endliche geometrische Reihe

Für $q \neq 1$ gilt

$$1 + q + q^2 + ... + q^n \;=\; \sum_{k=0}^{n} q^k \;=\; \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Zur Herleitung multipliziert man die linke Seite mit $(1 - q)$...
Zusammenhang mit der "3. Binomischen Formel":

$$\begin{aligned} a^{n+1} - b^{n+1} &= a^{n+1}(1 - q^{n+1}) \quad \text{mit} \quad q = b/a \\ &= a^{n+1}(1 - q) \sum_{k=0}^{n} q^k \\ &= (a - b) \sum_{k=0}^{n} a^{n-k} b^k \end{aligned}$$

Den Spezialfall $n = 1$ kennt jeder...

1.4 Binomische Formel

$$(a + b)^n \;=\; \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Fakultät und Binomialkoeffizienten:

$$\begin{aligned} k! &= 1 \cdot 2 \cdots k \\ 0! &\equiv 1 \\ \binom{n}{k} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} \\ \binom{n}{k} &= \binom{n}{n-k} \\ \binom{n}{0} &= 1 \qquad \binom{n}{1} = n \\ \binom{n}{k} &= 0 \quad \text{für} \quad k > n \\ \binom{n+1}{k+1} &= \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} \end{aligned}$$

Die letzte Relation liegt dem *Pascalschen Dreieck* zu Grunde, Beweis siehe Übungsblatt.