

Mathematische Grundlagen

Vorlesung 2 – Notizen

<http://www-com.physik.hu-berlin.de/~bunk/mathgrund>

Komplexe Zahlen

Wir gehen aus von den *reellen Zahlen* \mathbb{R} , nehmen als neues Element die *imaginäre Einheit* i (Euler) hinzu:

$$i = \sqrt{-1}$$

und erweitern so die reellen zu den *komplexen Zahlen* \mathbb{C} , die nun einen *Realteil* und einen *Imaginärteil* haben:

$$\begin{aligned} z &= a + ib & a, b \in \mathbb{R} \\ a &= \operatorname{Re} z \\ b &= \operatorname{Im} z \end{aligned}$$

Die komplexen Zahlen finden keinen Platz mehr auf der Geraden der reellen Zahlen, man stellt sie in der komplexen Ebene (Gauß) dar:

Skizze

Außerdem definiert man für $z = a + ib$ den Betrag und die *konjugiert komplexe Zahl* durch

$$\begin{aligned} |z| &= \sqrt{a^2 + b^2} \geq 0 \\ z^* &= a - ib \end{aligned}$$

Beim Rechnen mit komplexen Zahlen gelten die üblichen algebraischen Regeln, zusätzlich benutzt man $i^2 = -1$, wann immer es möglich ist. Damit kann man z.B. i^3, i^4 usw. vereinfachen und

$$\begin{aligned} (a + ib) \pm (c + id) &= (a \pm c) + i(b \pm d) \\ (a + ib)(c + id) &= (ac - bd) + i(ad + bc) \end{aligned}$$

Die komplexe Null (das neutrale Element der Addition) ist $0 = 0 + i0$ und es gilt

$$z = 0 \Leftrightarrow |z| = 0$$

Es gibt eine Reihe zusätzlicher Relationen, die man leicht nachrechnet und dann wie selbstverständlich benutzt, z.B.

$$\begin{aligned}(u + v)^* &= u^* + v^* \\ (uv)^* &= u^*v^* \\ uu^* &= |u|^2 \\ |uv| &= |u||v|\end{aligned}$$

Durch einen Trick (“Erweitern mit z^* ”) ist damit auch die komplexe Division explizit darstellbar (wenn $c + id \neq 0$!):

$$\begin{aligned}(a + ib)/(c + id) &= \frac{(a + ib)(c - id)}{(c + id)(c - id)} \\ &= \frac{(ac + bd) + i(bc - ad)}{c^2 + d^2}\end{aligned}$$

Mit Blick auf die Gaußsche Zahlenebene in *Polar-Koordinaten* können wir nun jedes $z \in \mathbb{C}, z \neq 0$ als Produkt darstellen:

$$\begin{aligned}z &= |z|u \\ \text{mit } u &= \cos \varphi + i \sin \varphi \\ |u| &= 1 \\ \operatorname{Re} z &= |z| \cos \varphi \\ \operatorname{Im} z &= |z| \sin \varphi\end{aligned}$$

$u = z/|z|$ heißt *Phasenfaktor* und liegt auf dem Einheitskreis, φ ist der *Phasenwinkel* (auch *Argument* genannt).

Mit Hilfe der Additionstheoreme für Sinus und Cosinus rechnet man aus:

$$(\cos \alpha + i \sin \alpha)(\cos \beta + i \sin \beta) = \cos(\alpha + \beta) + i \sin(\alpha + \beta)$$

und bekommt (durch Induktionsbeweis) den **Satz von Moivre**:

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos n\varphi + i \sin n\varphi$$

Damit ist es (formal!) nicht mehr weit zur berühmten **Eulerformel**

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$$

wobei e die Eulerzahl bedeutet (siehe Exponentialfunktion) und der Winkel φ im *Bogenmass* zu nehmen ist ($180^\circ = \pi$). Dieser Satz ist tatsächlich nicht leicht zu beweisen (Analysis!), aber rechnerisch extrem nützlich, denn er bringt den Satz von Moivre und viele andere trigonometrische Relationen unter das Dach der Potenzgesetze, z.B.

$$e^{i\alpha} e^{i\beta} = e^{i(\alpha+\beta)}$$

Mehr dazu in der nächsten Vorlesung.