

Mathematische Grundlagen

Vorlesung 3 – Notizen

<http://www-com.physik.hu-berlin.de/~bunk/mathgrund>

Trigonometrische Funktionen

Anhand der Seitenverhältnisse im rechtwinkligen Dreieck [Skizze] definiert man die *Trigonometrischen Funktionen (Winkelfunktionen)*

$$\begin{aligned} \sin \alpha &= \frac{a}{c} & \cos \alpha &= \frac{b}{c} & \tan \alpha &= \frac{a}{b} \\ \cot \alpha &= \frac{b}{a} = \frac{1}{\tan \alpha} & \sec \alpha &= \frac{c}{b} = \frac{1}{\cos \alpha} & \csc \alpha &= \frac{c}{a} = \frac{1}{\sin \alpha} \end{aligned}$$

Einige Relationen sind offensichtlich:

$$\begin{aligned} \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha &= 1 \\ \tan \alpha &= \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \end{aligned}$$

aber es kommen noch viele weitere dazu.

Wie die verschiedenen trigonometrischen Funktionen vom Winkel abhängen, sieht man am besten am **Einheitskreis**:

[Skizze]

Zwischen 0 und $\pi/2$ (90°) sind die Winkelfunktionen positiv, die Werte in anderen Quadranten liest man am besten am Einheitskreis ab. Der cos ist eine *gerade* Funktion, sin und tan sind *ungerade*:

$$\begin{aligned} \cos(-\varphi) &= \cos \varphi \\ \sin(-\varphi) &= -\sin \varphi & \tan(-\varphi) &= -\tan \varphi \end{aligned}$$

Man erkennt auch viele weitere Relationen vom Typ

$$\begin{aligned} \sin(\pi + \varphi) &= -\sin \varphi & \cos(\pi + \varphi) &= -\cos \varphi \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) &= \cos \varphi & \text{etc} & \end{aligned}$$

Alle Winkelfunktionen sind periodisch mit 2π (360°), der Tangens *divergiert* bei $\pm\pi/2$ ($\pm 90^\circ$) und setzt sich mit der Periode π (180°) fort.

[Skizze]

Bevor es zu unübersichtlich wird, bringen wir die **Eulerformel** ins Spiel, denn sie erlaubt uns zu schreiben:

$$\begin{aligned}\cos \varphi &= \operatorname{Re} e^{i\varphi} = \frac{1}{2}(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}) \\ \sin \varphi &= \operatorname{Im} e^{i\varphi} = \frac{1}{2i}(e^{i\varphi} - e^{-i\varphi})\end{aligned}$$

Umgekehrt finden wir für die komplexe Exponentialfunktion die bemerkenswerte Eigenschaft

$$\begin{aligned}e^{2\pi ni} &= 1 \quad n \in \mathbb{Z} \\ \Rightarrow e^{i(\varphi+2\pi n)} &= e^{i\varphi}\end{aligned}$$

Aus der Eulerformel bekommen wir nun leicht Ausdrücke für Winkelfunktionen des **doppelten** Winkels etc:

$$\begin{aligned}e^{2i\varphi} &= (e^{i\varphi})^2 \\ \Rightarrow \cos 2\varphi + i \sin 2\varphi &= (\cos \varphi + i \sin \varphi)^2 \\ &= \cos^2 \varphi + 2i \sin \varphi \cos \varphi - \sin^2 \varphi \\ \Rightarrow \cos 2\varphi &= \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi = 1 - 2 \sin^2 \varphi = 2 \cos^2 \varphi - 1 \\ \sin 2\varphi &= 2 \sin \varphi \cos \varphi\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos 3\varphi &= \operatorname{Re} (\cos \varphi + i \sin \varphi)^3 \\ &= \operatorname{Re} (\cos^3 \varphi + 3i \cos^2 \varphi \sin \varphi - 3 \cos \varphi \sin^2 \varphi - i \sin^3 \varphi) \\ &= \cos^3 \varphi - 3 \cos \varphi \sin^2 \varphi = \cos \varphi (4 \cos^2 \varphi - 3)\end{aligned}$$

Ebenso finden wir die Additionstheoreme wieder (die wir schon in den Satz von Moivre eingebaut hatten), z.B.

$$\begin{aligned}\cos(\alpha + \beta) &= \operatorname{Re} e^{i(\alpha+\beta)} = \operatorname{Re} (e^{i\alpha} e^{i\beta}) \\ &= \operatorname{Re} [(\cos \alpha + i \sin \alpha)(\cos \beta + i \sin \beta)] \\ &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta\end{aligned}$$

Zur Abrundung noch eine Formel für **halbe** Winkel:

$$\begin{aligned}\sin^2 \frac{\varphi}{2} &= \left(\frac{e^{i\varphi/2} - e^{-i\varphi/2}}{2i} \right)^2 \\ &= -\frac{1}{4} (e^{i\varphi} - 2 + e^{-i\varphi}) \\ &= -\frac{1}{4} (2 \cos \varphi - 2) = \frac{1}{2} (1 - \cos \varphi) \\ \Rightarrow \sin \frac{\varphi}{2} &= \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \varphi}{2}}\end{aligned}$$

Das richtige Wurzelvorzeichen hängt vom Quadranten ab.