

Mathematische Grundlagen

Vorlesung 4 – Notizen

Trigonometrische Umkehrfunktionen

Wegen der Periodizität der trigonometrischen Funktionen sind ihre Umkehrfunktionen nicht eindeutig, sondern haben mehrere *Zweige*.

[Skizzen]

$$\begin{aligned}
 x &= \sin \varphi \Leftrightarrow \varphi = \mathbf{arcsin} x \\
 x \in [-1, 1] &\rightarrow \varphi \in [-\pi/2, \pi/2] \quad \text{Hauptzweig} \\
 \varphi &= \pi - \arcsin x \quad \text{alternativer Zweig} \\
 \text{alle Zweige: } &\varphi + 2\pi n \quad n \in \mathbb{Z} \\
 &\text{ungerade Funktion}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 x &= \cos \varphi \Leftrightarrow \varphi = \mathbf{arccos} x \\
 x \in [-1, 1] &\rightarrow \varphi \in [0, \pi] \quad \text{Hauptzweig} \\
 \varphi &= -\arccos x \quad \text{alternativer Zweig} \\
 \text{alle Zweige: } &\varphi + 2\pi n \quad n \in \mathbb{Z} \\
 \arccos(-x) &= \pi - \arccos x
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 x &= \tan \varphi \Leftrightarrow \varphi = \mathbf{arctan} x \\
 x \in \mathbb{R} &\rightarrow \varphi \in (-\pi/2, \pi/2) \quad \text{Hauptzweig} \\
 \text{alle Zweige: } &\varphi + n\pi \quad n \in \mathbb{Z} \\
 &\text{ungerade Funktion}
 \end{aligned}$$

Hyperbelfunktionen

Sie werden ganz harmlos durch die (reelle) Exponentialfunktion definiert:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{cosh} x &= \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \cosh(-x) \\
 \mathbf{sinh} x &= \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = -\sinh(-x) \\
 \mathbf{tanh} x &= \frac{\sinh x}{\cosh x} = -\tanh(-x)
 \end{aligned}$$

cosh und sinh geben die Zerlegung der Exponentialfunktion in ihren *geraden* und *ungeraden* Anteil:

$$e^x = \cosh x + \sinh x$$

Es bestehen offensichtliche Beziehungen zu den trigonometrischen Funktionen, z.B.

$$\cos x = \cosh(ix) \quad i \sin x = \sinh(ix) \quad \text{etc}$$

und ganz analog lassen sich hier Additionstheoreme usw herleiten, z.B.

$$\cosh(x + y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$$

[Skizzen]

Die Hyperbelfunktionen sind *nicht* periodisch, ihre Umkehrfunktionen sind (fast) eindeutig und sogar durch (natürliche) Logarithmen darstellbar:

$$\begin{aligned} x = \sinh y &\Leftrightarrow y = \mathbf{arsinh} x = \log(x + \sqrt{x^2 + 1}) & x \in \mathbb{R} \\ x = \cosh y &\Leftrightarrow y = \pm \mathbf{arcosh} x = \pm \log(x + \sqrt{x^2 - 1}) & x \geq 1 \\ x = \tanh y &\Leftrightarrow y = \mathbf{artanh} x = \frac{1}{2} \log \frac{1+x}{1-x} & x \in (-1, 1) \end{aligned}$$

***n*-te Wurzeln**

Wir suchen erstmal die *n*-ten Einheitswurzeln im Komplexen als Lösungen von

$$\begin{aligned} z^n &= 1 \\ \text{Ansatz: } z &= |z| e^{i\varphi} \\ \Rightarrow |z|^n e^{in\varphi} &= 1 \\ \Rightarrow |z| &= 1 \quad \text{und} \quad n\varphi = 2\pi k \quad \text{mit } k \in \mathbb{Z} \\ \Rightarrow z &= z_k = e^{i\varphi_k} \quad \text{mit } \varphi_k = \frac{2\pi k}{n} \quad k = 0..(n-1) \end{aligned}$$

[Skizze]

Allgemeiner hat jede komplexe Zahl $z \neq 0$ jetzt *n* verschiedene *n*-te Wurzeln:

$$\begin{aligned} z &= |z| e^{i\varphi} \\ \Rightarrow \sqrt[n]{z} &= \sqrt[n]{|z|} e^{i(\varphi+2\pi k)/n} \quad k = 0..(n-1) \end{aligned}$$

Dabei ist $\sqrt[n]{|z|}$ die gewöhnliche, positive reelle Wurzel.

In der Regel sind alle Wurzeln komplex, manchmal sind auch reelle dabei:

$$\sqrt{9} = \pm 3, \quad \sqrt[3]{-27} = -3.$$

Gaußscher Fundamentalsatz der Algebra

Jedes Polynom n -ten Grades

$$P_n(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$$

mit $a_i \in \mathbb{C}$
 $a_n \neq 0$

hat n (nicht notwendig verschiedene) Wurzeln (Nullstellen) $\{z_k \in \mathbb{C}, k = 1..n\}$ und lässt sich damit schreiben als

$$P_n(z) = a_n(z - z_1) \cdots (z - z_n)$$

Dieser Satz zeigt, dass die komplexen Zahlen ein abgeschlossenes System bilden, jedenfalls hinsichtlich der Lösung polynomischer Gleichungen.

Durch Ausmultiplizieren der Produktdarstellung bekommt man Formeln, die die Koeffizienten durch die Nullstellen ausdrücken (Vieta-Formeln).

Polynome mit **reellen Koeffizienten** können, wie wir wissen, reelle oder komplexe Nullstellen haben – die komplexen kommen dann in konjugierten Paaren, z.B.

$$\begin{aligned} P_n(z_1) &= 0 & \text{Im } z_1 &\neq 0 \\ \Rightarrow P_n(z_1^*) &= 0 \\ \Rightarrow z_2 &= z_1^* \neq z_1 \\ (z - z_1)(z - z_2) &= z^2 - 2z \text{Re } z_1 + |z_1|^2 \end{aligned}$$

Ein solches Paar liefert also einen reellen, quadratischen Faktor in der Produktdarstellung des Polynoms, weiter kommt man im Reellen nicht.