Dr. B. Bunk

Mathematische Grundlagen
Vorlesung 5 – Notizen

Grenzwerte

Wir betrachten zunächst (unendliche) Folgen $\{a_n, n = 1..\infty\}$, deren Glieder durch eine Formel oder auch durch eine rekursive Vorschrift gegeben sind, z.B.

$$\begin{aligned} a_n &= 1/n \\ a_n &= q^n \\ a_{n+1} &= a_n + a_{n-1}, \quad a_0 = 1, \quad a_1 = 1 \quad \text{(Fibonacci)} \end{aligned}$$

Dann diskutieren wir endliche und unendliche Reihen:

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{k=1}^{n} a_k \\ s &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k \end{aligned}$$

und schließlich Grenzwerte für Funktionen.

Nullfolgen

Definition: Eine (unendliche) Folge $\{a_n\}$ ist eine **Nullfolge**, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ einen Index N gibt, so dass $|a_n| < \epsilon \quad \forall n > N$. Wir schreiben

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

Beispiel: q^n mit $|q| < 1$.
Wenn $\{a_n\}$ und $\{b_n\}$ Nullfolgen sind, dann gilt das auch für $ca_n, a_n \pm b_n, a_n b_n$.
Wenn $\{a_n\}$ eine Nullfolge ist und $|b_n| \leq |a_n|$, dann ist auch $\{b_n\}$ eine Nullfolge.
Definition: Eine Folge $\{a_n\}$ konvergiert genau dann gegen den **Grenzwert** a, wenn $\{(a_n - a)\}$ eine Nullfolge bildet, und man schreibt

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a$$

Cauchysches Konvergenzkriterium: Eine Folge konvergiert genau dann, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ einen Index N gibt, so dass $|a_n - a_m| < \epsilon \quad \forall n, m > N$.

Endliche Reihen

Hier geht es natürlich nicht um Konvergenz, sondern um einige Formeln.
Wir kennen schon die geometrische Reihe

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \qquad q \neq 1$$

Außerdem braucht man öfter

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$
$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad etc$$

Die erste sollte bekannt sein, die zweite leiten wir später ab.

Unendliche Reihen

Definition: Die unendliche Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ist genau dann **konvergent** (mit Grenzwert s):

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = s$$

wenn die Folge der *Partialsummen*

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

konvergiert (gegen s). Die Konvergenz ist **absolut**, wenn $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ konvergiert.
Die unendliche geometrische Reihe ist für jedes $|q| < 1$ absolut konvergent:

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$$

Die *harmonische Reihe*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$

ist divergent, die *alternierenden* Reihen

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$$
$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$$

konvergieren (aber nur *bedingt*, nicht *absolut*).
Mehr dazu später im Zusammenhang mit den *Potenzreihen.*
Konvergenzkriterien:

- **Majorante:** Wenn $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ absolut konvergiert und $|b_k| \leq |a_k| \quad \forall k \geq N$, dann ist auch $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ absolut konvergent.

- **Quotienten:** $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ ist absolut konvergent, wenn es ein $q < 1$ gibt mit $|a_{k+1}/a_k| \leq q \quad \forall k \geq N$.

- **Wurzel:** $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ ist absolut konvergent, wenn es ein $q < 1$ gibt mit $\sqrt[k]{|a_k|} \leq q \quad \forall k \geq N$.

- **Leibniz:** Die alternierende Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k$ mit $a_k > 0$ ist konvergent, wenn die $\{a_k\}$ eine monotone Nullfolge bilden.

Die (divergente) harmonische Reihe ist tatsächlich ein Grenzfall: für jedes $\alpha > 1$ *konvergiert*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha}}$$

$$\text{z.B.} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

(Letzteres ist aber nicht leicht herzuleiten.)

Grenzwerte von Funktionen

Definition: Die Funktion $f(x)$ **konvergiert** für $x \to x_0$ gegen den Grenzwert c, wenn für jede Folge $\{x_n\}$, die im Definitionsbereich von $f(x)$ liegt und gegen x_0 konvergiert, die Folge der Funktionswerte $f(x_n)$ gegen c konvergiert, und man schreibt

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = c$$

[Dabei muss x_0 ein *Häufungspunkt* von D sein, d.h. für jedes $\epsilon > 0$ müssen im Intervall $(x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$ unendlich viele Punkte von D liegen. $x_0 \notin D$ ist möglich.]
Definition: Die Funktion $f(x)$ ist **stetig** an der Stelle $x_0 \in D$, wenn

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$