

Mathematische Grundlagen

Vorlesung 6 – Notizen

Ableitungen

Definition

Definition: Eine Funktion $f(x)$ ist **differenzierbar** an der Stelle x_0 , wenn

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existiert. Der Grenzwert ist die **Ableitung** oder der **Differenzialquotient** von $f(x)$ an der Stelle x_0 und wird mit $f'(x_0)$ oder $\frac{df}{dx}(x_0)$ bezeichnet.

Stetigkeit ist eine *notwendige* Bedingung für Differenzierbarkeit.

Beweis: Sei h_n eine Nullfolge

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} [f(x_0 + h_n) - f(x_0)] &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{f(x_0 + h_n) - f(x_0)}{h_n} h_n \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{f(x_0 + h_n) - f(x_0)}{h_n} \right) \lim_{n \rightarrow \infty} h_n \\ &= f'(x_0) \cdot 0 = 0 \\ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) &= f(x_0) \end{aligned}$$

Potenzfunktion

Für $n \in \mathbb{N}$ berechnet man mit der Binomischen Formel:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^n \\ \Rightarrow f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x^n + nhx^{n-1} + \binom{n}{2}h^2x^{n-2} + \dots + h^n) - x^n}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(nx^{n-1} + \binom{n}{2}hx^{n-2} + \dots + h^{n-1} \right) \\ &= nx^{n-1} \end{aligned}$$

Tatsächlich gilt diese Ableitungsformel für *alle* Exponenten (sogar komplexe):

$$f(x) = x^a \quad \Rightarrow \quad f'(x) = ax^{a-1}$$

Damit können wir auch Wurzelfunktionen ableiten, etwa

$$(\sqrt{x})' = (x^{1/2})' = \frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Ableitungsregeln

Abkürzung: f, g bezeichnen (differenzierbare) Funktionen $f(x), g(x)$; a, b seien Konstanten.

- **Linearität:** $(af + bg)' = af' + bg'$
- **Produktregel:** $(fg)' = f'g + fg'$
- **Quotientenregel:** $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2} \quad g(x) \neq 0$
- **Kettenregel:** $(f(g(x)))' = f'(u)g'(x) \quad \text{mit } u = g(x)$

Herleitung z.B. der Produktregel:

$$\begin{aligned}(fg)'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[f(x+h) - f(x)]g(x+h) + f(x)[g(x+h) - g(x)]}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \lim_{h \rightarrow 0} g(x+h) + f(x) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\ &= f'(x)g(x) + f(x)g'(x)\end{aligned}$$

Ein wichtiger Spezialfall der Quotientenregel betrifft die inverse Funktion (numerisch, *nicht* Umkehrfunktion):

$$\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2}$$

Die Kettenregel kann man sich in der Schreibweise mit *Differenzialen* leicht merken:

$$y = f(u) \quad u = g(x) \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx}$$

(aber natürlich kann man Differenziale nicht "kürzen"!). Man spricht auch von der "äußeren" und der "inneren" Funktion und bezeichnet die Multiplikation mit g' als "Nachdifferenzieren".

Weitere Funktionen

Ohne Beweis nehmen wir die Ableitung der Exponentialfunktion zur Kenntnis:

$$\begin{aligned}(e^x)' &= e^x \\ \Rightarrow (e^{ax})' &= a e^{ax}\end{aligned}$$

Der zweite Schritt zeigt die häufigste Anwendung der Kettenregel: die innere Funktion ist $g(x) = ax$, somit liefert das Nachdifferenzieren einen Faktor $g' = a$.

Wegen $a = e^{\log a}$ können wir damit auch die allgemeine Potenzfunktion ableiten:

$$(a^x)' = (e^{(\log a)x})' = e^{(\log a)x} (\log a) = a^x \log a$$

Über die Exponentialfunktion erhalten wir jetzt die Ableitungen der trigonometrischen und Hyperbelfunktionen:

$$\begin{aligned}(\sin x)' &= \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \right)' \\ &= \frac{ie^{ix} + ie^{-ix}}{2i} = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = \cos x \\ (\sinh x)' &= \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right)' \\ &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x\end{aligned}$$

etc

Mathematische Grundlagen

Vorlesung 6 – Kontrollfragen

1. Wiederholung: lokalisieren Sie die folgenden Zahlen:

(a) $z = -i$

(b) $z = 1 + i$

(c) $z = i - 1$

(d) $z = i\sqrt{3} - 1$

in der komplexen Ebene und bestimmen Sie ihre Polarform $z = |z|e^{i\varphi}$.

2. Bilden Sie die Ableitung von $x^{-3} = 1/x^3$

(a) als Ableitung einer Potenz,

(b) mit der Quotientenregel, angewandt auf $\frac{1}{x^3}$.

3. Berechnen Sie die Ableitungen von $\cos x$ und $\cosh x$ mit Hilfe der Exponentialdarstellung.

4. ♡ Versuchen Sie, die Kettenregel zu beweisen.

Aufgaben mit ♡ sind Liebhaberstücke, ihre Lösung ist nicht nötig zum Verständnis der "Mathematischen Grundlagen".