Dr. B. Bunk WS 2014/15

Mathematische Grundlagen
Vorlesung 7 – Notizen

Umkehrfunktionen

Sei $g(y)$ die Umkehrfunktion von $f(x)$:

$$y = f(x) \quad \Leftrightarrow \quad x = g(y)$$

Ihre Ableitungen sind zueinander (numerisch) invers, wie man mit der Kettenregel leicht zeigen kann:

$$\begin{aligned} y &= f(g(y)) \\ \Rightarrow \quad 1 &= f'(x)\, g'(y) \\ \text{symbolisch:} \quad 1 &= \frac{dy}{dx}\,\frac{dx}{dy} \end{aligned}$$

Beispiel:

$$\begin{aligned} y &= f(x) = x^2 \quad (x > 0) \quad \Rightarrow \quad x = g(y) = \sqrt{y} \\ f'(x) &= 2x \quad \Rightarrow \quad g'(y) = \frac{1}{2x} = \frac{1}{2\sqrt{y}} \end{aligned}$$

Der Umgang mit Umkehrfunktionen ist, wie wir schon gesehen haben, von Mehrdeutigkeiten geplagt, deshalb halten wir fest, dass bei (reellen) Wurzeln der *positive* Wert und bei trigonometrischen Funktionen der *Hauptzweig* gemeint ist.
Typische Beispiele:

$$\begin{aligned} (\log x)' &= \frac{1}{(e^y)'} = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{x} && x > 0 \\ (\arcsin x)' &= \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} && x \in (-1,1) \\ (\operatorname{artanh} x)' &= \frac{1}{(\tanh y)'} = \cosh^2 y = \frac{1}{1-\tanh^2 y} = \frac{1}{1-x^2} && x \in (-1,1) \end{aligned}$$

Damit können wir unsere Liste bekannter Ableitungen beträchtlich erweitern. Eine vollständige Liste mit allen "elementaren" Funktionen findet sich auf der Rückseite von Übungsblatt 9.

Höhere und partielle Ableitungen

Wenn die Ableitung einer Funktion selber wieder differenzierbar ist, kann man höhere Ableitungen bilden. Notationen:

$$\begin{aligned} f''(x) &\equiv \frac{d^2 f}{dx^2}(x) \\ f^{(n)}(x) &\equiv \frac{d^n f}{dx^n}(x) \quad \text{etc} \end{aligned}$$

Und wenn eine Funktion von mehreren Variablen abhängt, kann man sie *partiell* differenzieren, d.h. die Ableitung nach der angegeben Variablen bilden und dabei alle anderen als konstant behandeln. Das folgende Beispiel zeigt die Notation:

$$\begin{aligned} f(x,y) &= (ay^2+b)\sin x \\ \frac{\partial f}{\partial x} &= (ay^2+b)\cos x \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= -(ay^2+b)\sin x \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= 2ay\cos x \end{aligned}$$

In der Regel hängen gemischte partielle Ableitungen nicht von der Reihenfolge ab, in der man sie ausführt.

Integralrechnung

Wir gehen von dem Problem aus, die Fläche unter einer Kurve $f(x)$ über einem Intervall $x \in [a,b]$ zu berechnen. Dazu teilen wir das Intervall in n Teile der Länge Δx_i, wählen in jedem Intervall einen Stützpunkt x_i und nähern die gesuchte Fläche durch

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i \, f(x_i)$$

[Skizze]
Wenn nun der Limes $n \to \infty$ existiert, wobei alle $\Delta x_i \to 0$, und unabhängig ist von der Wahl der Stützpunkte x_i, dann definieren wir damit das **bestimmte Integral** der Funktion:

$$\int_a^b dx\, f(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i \, f(x_i)$$

Dieser Grenzwert **existiert** jedenfalls (wie man zeigen kann), wenn $f(x)$ im abgeschlossenen Intervall $x \in [a,b]$ stetig ist.

Das Integral stellt eine *orientierte* Fläche dar, denn es kann rechnerisch negativ werden, z.B. wenn $f(x) < 0$ oder $a > b$.
Die Berechnung von Integralen stützt sich auf den
Hauptsatz der Differential– und Integralrechnung:
Wenn $f(x)$ stetig ist für $x \in [a, b]$, dann ist das (bestimmte) Integral als Funktion der *oberen Grenze*:

$$I(x) \;=\; \int_a^x du\, f(u)$$

eine **Stammfunktion** von $f(x)$, d.h.

$$I'(x) \;=\; f(x) \qquad x \in [a, b]$$

Zu einer Funktion $f(x)$ gibt es eine Schar von Stammfunktionen $F(x)$, die sich alle um eine additive Konstante unterscheiden: $F(x) = I(x) + c$. Wegen $I(a) = 0$ gilt $c = F(a)$ und damit wird das bestimmte Integral

$$I \;\equiv\; I(b) \;=\; \int_a^b dx\, f(x) \;=\; F(b) - F(a)$$

Hier ist es jetzt gleichgültig, welche additive Konstante in F man gewählt hat, deshalb wird diese Mehrdeutigkeit oft einfach ignoriert. Stattdessen schreibt man Stammfunktionen als **unbestimmte Integrale**:

$$F(x) \;=\; \int dx\, f(x)$$

d.h. man lässt die Grenzen weg und schreibt Stammfunktion und Intergral in derselben Variablen.
Die praktische Berechnung von Integralen ist nun auf das Finden von Stammfunktionen zurückgeführt, und im einfachsten Fall müssen wir nur unsere Liste der Ableitungen "von rechts nach links lesen". So sehen wir z.B., dass

$$\begin{aligned}
f(x) \;&=\; a x^{a-1} \quad \Rightarrow \quad F(x) \;=\; x^a \quad a \neq 0 \\
\text{oder} \quad f(x) \;&=\; x^a \quad \Rightarrow \quad F(x) \;=\; \frac{1}{a+1} x^{a+1} \quad a \neq -1 \\
\text{oder} \quad \int dx\, x^a \;&=\; \frac{1}{a+1} x^{a+1} \quad a \neq -1
\end{aligned}$$

Der hier ausgeschlosse Exponent $a = -1$ findet sich ein paar Zeilen tiefer:

$$\int dx\, \frac{1}{x} \;=\; \log|x| \qquad x \neq 0$$

Bemerkung: Durch die Betragsstriche funktioniert die Formel auch für $x < 0$.

Mathematische Grundlagen
Vorlesung 7 – Kontrollfragen

1. Wiederholung: Welche der folgenden Gleichungen sind *falsch*?
   (a) $\frac{3}{i} \stackrel{?}{=} -3i$
   (b) $i^5 \stackrel{?}{=} -i$
   (c) $4e^{3\pi i} \stackrel{?}{=} (2i)^2$
   (d) $2e^{3\pi i/2} \stackrel{?}{=} -i$

2. Berechnen Sie die Ableitung von $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $x > 0$ mit Hilfe
   (a) der Potenzformel,
   (b) der Umkehrfunktion.

3. Wie lauten die Stammfunktionen zu
   (a) $f(x) = x^3$
   (b) $f(x) = \sqrt{x}$
   (c) $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$
   (d) $f(x) = \cos x$

4. Berechnen Sie die Fläche unter der Sinuskurve:
   $$\int_0^\pi d\varphi \, \sin\varphi$$

5. ♡ Ist die Funktion
   $$f(x) = \begin{cases} x^3 \sin\frac{\pi}{x} & \text{für} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{für} \quad x = 0 \end{cases}$$
   bei $x = 0$ stetig und/oder differenzierbar?

Aufgaben mit ♡ sind für Liebhaber, ihre Lösung ist nicht nötig zum Verständnis der "Mathematischen Grundlagen".