

# Mathematische Grundlagen

## Vorlesung 8 – Notizen

### Integrationsregeln

#### Linearität

$$\int dx [af(x) + bg(x)] = a \int dx f(x) + b \int dx g(x)$$

#### Produktintegration

Anwendung des unbestimmten Integrals auf die Produktregel der Differentiation:  $(fg)' = f'g + fg'$  gibt die Regel der Produktintegration:

$$\begin{aligned} \int dx f'(x)g(x) &= f(x)g(x) - \int dx f(x)g'(x) \\ \int_a^b dx f'(x)g(x) &= [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b dx f(x)g'(x) \end{aligned}$$

$$\text{Notation: } [f(x)g(x)]_a^b \equiv f(b)g(b) - f(a)g(a)$$

Sie erlaubt es, das Integral über ein Produkt von Funktionen zwar nicht direkt auszurechnen, aber auf ein anderes Produktintegral zurückzuführen. Dabei wird der eine Faktor durch sein Integral (Stammfunktion) ersetzt:  $f' \rightarrow f$ , während der andere differenziert wird:  $g \rightarrow g'$ , daher auch der Name **”partielle Integration”**. Um auf diese Weise ein Integral seiner Lösung näher zu bringen, sollte die Stammfunktion  $f' \rightarrow f$  bekannt und nicht zu kompliziert sein – die Ableitung  $g \rightarrow g'$  bringt oft die entscheidende Vereinfachung.

Typisches Beispiel:

$$\begin{aligned} \int dt t \sin t & \quad f' = \sin t \quad g = t \\ &= -t \cos t + \int dt \cos t = -t \cos t + \sin t \end{aligned}$$

Im Folgenden tritt die Produktintegration gleich zweimal auf, um  $z^2 \rightarrow 2z \rightarrow 2$  auf eine Konstante zu reduzieren:

$$\begin{aligned} \int dz z^2 e^z & \quad f' = e^z \quad g = z^2 \\ &= z^2 e^z - \int dz 2z e^z & \quad f' = e^z \quad g = 2z \\ &= z^2 e^z - 2z e^z + \int dz 2e^z = z^2 e^z - 2z e^z + 2e^z = (z^2 - 2z + 2)e^z \end{aligned}$$

Und jetzt wird sogar ein Faktor  $f' = 1$  *erfunden*, um den Logarithmus durch Ableiten zu entschärfen:

$$\begin{aligned} \int dx \log x & \quad f' = 1 \quad g = \log x \quad x > 0 \\ & = x \log x - \int dx x \frac{1}{x} = x \log x - \int dx 1 = x \log x - x = x(\log x - 1) \end{aligned}$$

Wichtige Bemerkung: da Ableiten viel einfacher ist als Integrieren, sollte man *alle* unbestimmten Integrale zur **Kontrolle** differenzieren – das muss zum Integranden zurückführen!

### Substitution

Häufig hängt der Integrand in verschachtelter Form von der unabhängigen Variablen ab, wie im folgenden Beispiel:

$$\int dx (\sqrt{x} + 5)^4 = \int dx u^4 \quad \text{mit} \quad u = \sqrt{x} + 5$$

Hier würde man lieber über  $u$  integrieren, eine passende Umformung kann über die Kettenregel der Differentialrechnung gewonnen werden. Wir setzen an:

$$\begin{aligned} F(u(x)) & = \int dx f(u(x)) \\ \Rightarrow F'(u)u'(x) & = f(u(x)) \\ \Rightarrow F'(u) & = \frac{f(u(x))}{u'(x)} = x'(u)f(u) = \frac{dx}{du}f(u) \\ \Rightarrow F(u) & = \int du \frac{dx}{du}f(u) \end{aligned}$$

Im Beispiel:

$$\begin{aligned} \frac{du}{dx} & = \frac{1}{2\sqrt{x}} \\ \frac{dx}{du} & = 2\sqrt{x} = 2(u - 5) \end{aligned}$$

Wir brauchen also nicht nur die Substitutionsgleichung  $u = u(x)$ , sondern auch ihre Umkehrung  $x = x(u)$  und deren Ableitung  $x'(u)$ . Deshalb kann man eine Substitution nur benutzen, wo sie eindeutig umkehrbar ist – in unserem Beispiel für  $x \geq 0, u \geq 5$ .

$$\begin{aligned} \int dx (\sqrt{x} + 5)^4 & = \int du 2(u - 5)u^4 \\ & = 2 \int du u^5 - 10 \int du u^4 = \frac{1}{3}u^6 - 2u^5 = \dots \end{aligned}$$

Wenn das unbestimmte Integral gesucht ist, muss man hier noch die Substitution  $u = u(x)$  einsetzen. Beim bestimmten Integral kann man stattdessen auch die Grenzen umrechnen:

$$\begin{aligned} \int_{x_1}^{x_2} dx (\sqrt{x} + 5)^4 &= \int_{u_1}^{u_2} du 2(u - 5)u^4 \\ &= \left[ \frac{1}{3}u^6 - 2u^5 \right]_{u_1}^{u_2} \\ \text{mit } u_i &= u(x_i) \quad i = 1, 2 \end{aligned}$$

Wir halten die **Substitutionsregel** für unbestimmte und bestimmte Integrale fest:

$$\begin{aligned} \int dx f(u(x)) &= \int du \frac{dx}{du}(u) f(u) \\ \int_{x_1}^{x_2} dx f(u(x)) &= \int_{u_1}^{u_2} du \frac{dx}{du}(u) f(u) \\ u &= u(x) \quad \text{umkehrbar eindeutig} \\ u_i &= u(x_i) \quad i = 1, 2 \end{aligned}$$

Der Nutzen einer Substitution hängt davon ab, wie der Ableitungsfaktor  $\frac{dx}{du}(u)$  in den Integranden eingeht. Im häufigsten Fall eines linearen Zusammenhangs ist das einfach ein konstanter Faktor:

$$u = ax + b \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{dx} = a \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{du} = \frac{1}{a}$$

z.B.

$$\int dx \cos(ax + b) = \frac{1}{a} \int du \cos u = \frac{1}{a} \sin u = \frac{1}{a} \sin(ax + b)$$

Im folgenden Beispiel rettet ein Faktor  $x$  im Integranden die Situation:

$$\begin{aligned} &\int dx x \cos(x^2 + 5) \\ u = x^2 + 5 \quad \frac{du}{dx} &= 2x \quad dx = du \frac{1}{2x} = du \frac{1}{2\sqrt{u-5}} \\ &= \int du \frac{1}{2} \cos u = \dots \end{aligned}$$

sonst wäre  $\sqrt{u-5}$  im Nenner stehen geblieben. Hier ist auch schon angedeutet, wie man sich die Umrechnung üblicherweise als symbolische Relation zwischen den Differentialen veranschaulicht.

# Mathematische Grundlagen

## Vorlesung 8 – Kontrollfragen

1. Wiederholung: Geben Sie alle komplexen Lösungen der folgenden Gleichungen an (in Polarform):

(a)  $z^3 = 8i$

(b)  $z^5 + i = 0$

2. Berechnen Sie mit der Produktformel:

(a)  $\int dx x^2 \cos x$

(b)  $\int_1^2 dt t^2 \log t$

3. Integrieren Sie mit Hilfe einer geeigneten Substitution:

(a)  $\int dx \frac{x}{\sqrt{x^2 + 3}}$

(b)  $\int dt \frac{\sin \sqrt[3]{t}}{\sqrt[3]{t}}$

4. ♡ Was ist an der folgenden Rechnung falsch?

$$\begin{aligned} & \int_0^{\pi/2} d\varphi \sin \varphi \cos \varphi \\ & \quad x = \cos \varphi \quad dx = -d\varphi \sin \varphi \\ & = - \int_0^1 dx x = - \left[ \frac{1}{2} x^2 \right]_0^1 = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

(Der Integrand ist schließlich positiv!)

Aufgaben mit ♡ sind für Liebhaber, ihre Lösung ist nicht nötig zum Verständnis der "Mathematischen Grundlagen".