Mathematische Grundlagen

Vorlesung 9 – Lösungen

1. Finden Sie die Partialbruchzerlegungen von

   (a) $\dfrac{1}{x(x+2)} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x+2}\right)$

   (b) $\dfrac{1}{x^2-16} = \dfrac{1}{8}\left(\dfrac{1}{x-4} - \dfrac{1}{x+4}\right)$

2. Welche Substitutionen führen die folgenden Integrale auf die Integration rationaler Funktionen zurück?

   (a) $u = \cos\varphi \Rightarrow \quad \displaystyle\int du\, \frac{-1}{4+3u}$

   (b) $u = \sin\varphi \Rightarrow \quad \displaystyle\int du\, \frac{u}{2-u}$

   (c) $t = \tan\dfrac{\varphi}{2} \Rightarrow \quad \displaystyle\int dt\, \frac{2}{1+t^2}\, \frac{2+\frac{2t}{1+t^2}}{3-\frac{1-t^2}{1+t^2}} = \int dt\, \frac{2}{1+t^2}\, \frac{1+t+t^2}{1+2t^2}$

3. Welche der folgenden uneigentlichen Integrale sind konvergent?

   (a) $\displaystyle\int_0^\infty dx\, x\, e^{-x/2}$ konvergent wg. Exponentialfkt.

   (b) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty dt\, e^{-t}$ divergent bei $x \to -\infty$

   (c) $\displaystyle\int_0^2 du\, \frac{1}{\sqrt{2-u}}$ konvergent bei $u = 2$ wg. Wurzel

4. ♡

   (a) $\Gamma(1) = \displaystyle\int_0^\infty dt\, e^{-t} = 1.$

   (b) $\Gamma(z+1) = \displaystyle\int_0^\infty dt\, t^z e^{-t} = [-t^z e^{-t}]_0^\infty + \int_0^\infty dt\, z t^{z-1} e^{-t} = z\Gamma(z).$

   (c) $\Gamma(n+1) = n! \qquad 0! = \Gamma(1) = 1$