

Mathematische Grundlagen

Vorlesung 9 – Notizen

Spezielle Integranden

Logarithmische Ableitung

Bei Integranden der folgenden Form "sieht" man die Stammfunktion:

$$\int dx \frac{f'(x)}{f(x)} = \int dx (\log |f(x)|)' = \log |f(x)| \quad f(x) \neq 0$$

Das kommt gar nicht so selten vor, man nehme nur die folgenden Beispiele:

$$\begin{aligned} \int dx \tan x &= \int dx \frac{\sin x}{\cos x} = - \int dx \frac{(\cos x)'}{\cos x} = - \log |\cos x| \quad x \neq (2n+1)\frac{\pi}{2} \\ \int dx \frac{x}{1+x^2} &= \frac{1}{2} \int dx \frac{2x}{1+x^2} = \frac{1}{2} \log(1+x^2) \end{aligned}$$

Rationale Integranden

Zunächst ein Beispiel:

$$\begin{aligned} \frac{x}{(x+1)(x+2)} &= \frac{2(x+1) - (x+2)}{(x+1)(x+2)} = \frac{2}{x+2} - \frac{1}{x+1} \\ \Rightarrow \int dx \frac{x}{(x+1)(x+2)} &= 2 \log |x+2| - \log |x+1| \end{aligned}$$

Diese Schema führt zur Methode der **Partialbruchzerlegung**:

Seien $P_m(x)$ und $Q_n(x)$ Polynome vom Grad $m < n$. Wenn $Q_n(x)$ nur **einfache Wurzeln** x_k hat, dann erlaubt die **rationale Funktion** $R = P_m/Q_n$ die Zerlegung

$$\begin{aligned} R(x) &= \frac{P_m(x)}{Q_n(x)} \\ &= \sum_k \frac{a_k}{x - x_k} \end{aligned}$$

Für eine ν -**fache Wurzel** x_k ist allgemeiner anzusetzen:

$$\frac{a_k^{(1)}}{x - x_k} + \dots + \frac{a_k^{(\nu)}}{(x - x_k)^\nu}$$

Die Koeffizienten $a_k^{(j)}$ sind durch Multiplikation des Ansatzes mit $Q_n(x)$ und Koeffizientenvergleich zu bestimmen. Bei einer einfachen Wurzel x_k von $Q_n(x)$ gilt auch:

$$a_k = \frac{P_m(x_k)}{Q'_n(x_k)}$$

Der Gaußsche Fundamentalsatz erlaubt auf diese Weise die vollständige Zerlegung von $R(x)$ nach den Wurzeln von Q_n , wenn man (auch bei reellen Polynomen) komplexe Wurzeln zulässt.

Beispiele:

$$\begin{aligned} \frac{11x + 13}{x^2 + x - 6} &= \frac{11x + 13}{(x - 2)(x + 3)} = \frac{7}{x - 2} + \frac{4}{x + 3} \\ \Rightarrow \int dx \frac{11x + 13}{x^2 + x - 6} &= 7 \log |x - 2| + 4 \log |x + 3| \\ \frac{2}{x^2 + 1} &= \frac{2}{(x + i)(x - i)} = \frac{i}{x + i} + \frac{-i}{x - i} \\ \Rightarrow \int dx \frac{2}{x^2 + 1} &= i \log(x + i) - i \log(x - i) \end{aligned}$$

[In der letzten Zeile ohne $|\cdot|$ im \log – das Argument ist komplex!]

Für ein Zählerpolynom $P_m(x)$ vom Grad $m \geq n$ trennt man erstmal (z.B. durch Polynomdivision) ein Quotientenpolynom ab und wendet die Partialbruchzerlegung auf den Rest an:

$$\frac{2x^2 + 3}{x^2 - 3x + 2} = \frac{2(x^2 - 3x + 2) + 6x - 1}{x^2 - 3x + 2} = 2 + \frac{6x - 1}{x^2 - 3x + 2} = \dots$$

Da die einzelnen Terme der Partialbruchzerlegung leicht zu integrieren sind, ist damit *jede rationale Funktion* im Prinzip integrierbar, allerdings kann die tatsächliche Berechnung der Wurzeln des Nennerpolynoms bei höherer Ordnung sehr schwierig oder sogar algebraisch unmöglich sein.

Trigonometrische Integranden

Für Integranden, die aus trigonometrischen Funktionen aufgebaut sind, gibt es einige besonders beliebte Substitutionen.

Wenn es sich um eine rationale Funktion $R(\cdot)$ von trigonometrischen Funktionen *desselben Winkels* handelt, kann man das Integral immer auf den rationalen Fall zurückführen, den wir im vorigen Abschnitt umfassend behandelt haben:

$$\begin{aligned} \int dx \cos x R(\sin x) &= \int du R(u) \\ \text{mit } u &= \sin x & du &= dx \cos x \\ \int dx \sin x R(\cos x) &= - \int du R(u) \\ \text{mit } u &= \cos x & du &= -dx \sin x \end{aligned}$$

$$\int dx R(\sin x, \cos x)$$

$$t = \tan \frac{x}{2} \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{2 \cos^2 \frac{x}{2}} = \frac{1+t^2}{2} \Rightarrow dx = dt \frac{2}{1+t^2}$$

Die letzte Substitution ist besonders bemerkenswert, denn sie erlaubt es, *alle* trigonometrischen Funktionen *eines* Winkels einheitlich auszudrücken, ohne dass Wurzeln auftreten.

Mit den **Hyperbelfunktionen** kann man offensichtlich ganz analog verfahren.

Uneigentliche Integrale

Darunter versteht man Integrale, die nicht direkt als Riemann-Integrale definiert werden können, sondern eine zusätzliche Grenzwertbildung enthalten. Das ist der Fall, wenn der Integrand an einer Stelle eine Singularität aufweist oder wenn sich das (bestimmte) Integral bis $\pm\infty$ erstrecken soll.

Singularität

Beispiel für eine Singularität am Rand des Integrationsgebiets:

$$\int_0^1 dx \frac{1}{\sqrt{x}} = \lim_{a \rightarrow +0} \int_a^1 dx x^{-1/2} = \lim_{a \rightarrow +0} 2[x^{1/2}]_a^1 = \lim_{a \rightarrow +0} 2(1 - \sqrt{a}) = 2$$

Dieses Integral existiert also, obwohl der Integrand bei $x \rightarrow +0$ divergiert, denn das unbestimmte Integral (Stammfunktion) konvergiert dort.

Im allgemeinen ist es *hinreichend* für Konvergenz, wenn das Verhalten der Funktion $f(x)$ in der Umgebung der Singularität $x = a$ beschränkt ist durch eine integrierbare Potenz:

$$|f(x)| \leq \text{const} \times |x - a|^\alpha \quad \text{mit} \quad \alpha > -1$$

Unendliches Integrationsintervall

$$\int_1^\infty dx \frac{1}{x^{3/2}} = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b dx \frac{1}{x^{3/2}} = \lim_{b \rightarrow \infty} (-2)[x^{-1/2}]_1^b = \lim_{b \rightarrow \infty} (-2)(b^{-1/2} - 1) = 2$$

Hier ist offenbar eine Schranke

$$|f(x)| \leq \text{const} \times |x|^{-\alpha} \quad \text{mit} \quad \alpha > 1$$

für große $|x|$ ausreichend für Konvergenz. Da die Exponentialfunktion e^{cx} mit $c > 0$ schneller wächst als jede Potenz, ist man mit einem exponentiellen Abfall des Integranden immer auf der sicheren Seite.

Das vielleicht wichtigste Integral dieser Art definiert die **Gammafunktion** (auch von Euler!):

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} dt t^{z-1} e^{-t}$$

Für $z > 0$ (allgemeiner: $\operatorname{Re} z > 0$) ist das bei $t \rightarrow 0$ integrierbar, und der Faktor e^{-t} sichert die Konvergenz bei $t \rightarrow \infty$.

Vorlesung 9 – Kontrollfragen

1. Finden Sie die Partialbruchzerlegungen von

(a) $\frac{1}{x(x+2)}$

(b) $\frac{1}{x^2 - 16}$

2. Welche Substitutionen führen die folgenden Integrale auf die Integration rationaler Funktionen zurück?

(a) $\int d\varphi \frac{\sin \varphi}{4 + 3 \cos \varphi}$

(b) $\int d\varphi \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{2 - \sin \varphi}$

(c) $\int d\varphi \frac{2 + \sin \varphi}{3 - \cos \varphi}$

3. Welche der folgenden uneigentlichen Integrale sind konvergent?

(a) $\int_0^{\infty} dx x e^{-x/2}$

(b) $\int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-t}$

(c) $\int_0^2 du \frac{1}{\sqrt{2-u}}$

4. ♡ Die am Ende der Vorlesung definierte Eulersche Gammafunktion $\Gamma(z)$ lässt sich für $z \in \mathbb{N}$ einfach integrieren.

(a) Bestimmen Sie $\Gamma(1)$.

(b) Zeigen Sie die Relation $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ für $z > 0$.

(c) Wie hängt also $\Gamma(n)$ für $n \in \mathbb{N}$ mit der Fakultät zusammen?

Aufgaben mit ♡ sind für Liebhaber, ihre Lösung ist nicht nötig zum Verständnis der "Mathematischen Grundlagen".