# Mathematische Grundlagen

## Vorlesung 10 – Notizen

## Potenzreihen

### Taylor–Entwicklung

Wir wenden partielle Integration an, um eine Funktion $f(x)$ aus ihren "Verhalten" bei $x = 0$ zu bestimmen:

$$\begin{aligned}
\int_0^x du\, f'(u) &= f(x) - f(0) \\
\Rightarrow \quad f(x) &= f(0) + \int_0^x du\, f'(u) \\
&= f(0) - [(x-u)f'(u)]_{u=0}^x + \int_0^x du\,(x-u)f''(u) \\
&= f(0) + xf'(0) - \frac{1}{2}\left[(x-u)^2 f''(u)\right]_{u=0}^x + \frac{1}{2}\int_0^x du\,(x-u)^2 f^{(3)}(u) \\
&= f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2} f''(0) + \frac{1}{2}\int_0^x du\,(x-u)^2 f^{(3)}(u) \\
&= \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0) + R_{n+1}(x) \\
\text{mit} \quad R_{n+1}(x) &= \frac{1}{n!}\int_0^x du\,(x-u)^n f^{(n+1)}(u)
\end{aligned}$$

Wenn eine Funktion $f(x)$ hinreichend oft stetig differenzierbar ist, kann man sie also durch Funktionswert und Ableitungen bei $x = 0$ darstellen. Diese Grundform der **Taylor–Entwicklung** dient einerseits dazu, $f(x)$ durch ein Polynom zu *approximieren* – dann erlaubt das Restglied $R_{n+1}$ eine Abschätzung der Genauigkeit, z.B.

$$\begin{aligned}
|f^{(n+1)}(u)| &\leq M \qquad 0 \leq u \leq x \\
\Rightarrow \quad |R_{n+1}(x)| &\leq \frac{M}{(n+1)!} x^{n+1} \;=\; \mathcal{O}(x^{n+1})
\end{aligned}$$

Der "Fehler" verschwindet also in derselben "Ordnung" wie der nächste Term der Reihe, wenn die Ableitung entsprechend beschränkt ist.

Oder man zeigt $\lim_{n\to\infty} R_{n+1}(x) = 0$ und findet so eine Darstellung von $f(x)$ als *unendliche Potenzreihe*:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0)$$

Wir beziehen die Entwicklung hier immer auf $x = 0$. Wenn eine andere Stelle $x = a$ zu betrachten ist, verschieben wir einfach die Variable: $f(a + h) = g(h)$.

## Eigenschaften von Potenzreihen

Im folgenden stellen wir Eigenschaften der Potenzreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

zusammen, wobei ohne weiteres $x, a_k \in \mathbb{C}$ angenommen werden kann.

- Wenn die Reihe für ein $x = x_0$ absolut konvergiert, dann gilt das auch für alle $|x| < |x_0|$.
- Wenn die Reihe für irgendein $x \neq 0$ absolut konvergiert, dann gibt es einen **Konvergenzradius** $\rho > 0$, so dass die Konvergenz **absolut** ist für alle $|x| < \rho$.
- Der Konvergenzradius lässt sich als Grenzwert berechnen:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} &= \lim_{k\to\infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} \\ &= \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} \end{aligned}$$

  Wenn $\frac{1}{\rho} = 0$, dann konvergiert die Reihe für alle $x \in \mathbb{C}$, und man setzt $\rho = \infty$.
- Innerhalb ihres (gemeinsamen) Konvergenzkreises können Potenzreihen gliedweise
  - mit einer Konstanten multipliziert,
  - addiert,
  - multipliziert,
  - differenziert und
  - integriert werden.

Die Multiplikation von Potenzreihen verlangt, die Terme neu zu ordnen:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k\right) \\ \text{mit} \quad c_0 &= a_0 b_0 \\ c_1 &= a_0 b_1 + a_1 b_0 \quad \text{etc} \end{aligned}$$

## Entwicklungen bekannter Funktionen

### Binomische und Geometrische Reihe

Durch wiederholtes Ableiten von $(1+x)^\alpha$ findet man die Entwicklung

$$\begin{aligned} (1+x)^\alpha &= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k \qquad \text{mit} \quad \binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!} \\ |x| &< 1 \end{aligned}$$

Für $\alpha = n \in \mathbb{N}$ bricht die Reihe bei $k = n$ ab.
Für $\alpha = -1$ hat man die **unendliche Geometrische Reihe**:
mit $\binom{-1}{k} = (-1)^k$ und $x \to -x$ folgt

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k \qquad |x| < 1$$

### Exponentialfunktion & Co

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \qquad \forall x \in \mathbb{C}$$

$$\cosh x = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{x^{2l}}{(2l)!} \qquad \sinh x = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{x^{2l+1}}{(2l+1)!}$$

$$\cos x = \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l \frac{x^{2l}}{(2l)!} \qquad \sin x = \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l \frac{x^{2l+1}}{(2l+1)!}$$

### Logarithmische Reihe

$$\log(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k \qquad |x| < 1$$

$$x = 1 \quad \Rightarrow \quad \log 2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \quad \text{bedingt konvergent}$$

$$x = -1 \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \quad \text{divergent}$$

$$\operatorname{Im} \log(1+ix) = \arctan x = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{2l+1} x^{2l+1} \qquad |x| < 1$$

$$x = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{\pi}{4} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{2l+1} \quad \text{Leibniz, bedingt konvergent}$$

# Vorlesung 10 – Kontrollfragen

1. Entwickeln Sie

   (a) $\sqrt{1+u}$ um $u = 0$

   (b) $\dfrac{1-t^2}{1+2t}$ um $t = 0$

   (c) $\cos\varphi$ um $\varphi = \frac{\pi}{4}$

   bis zum quadratischen Term einschließlich.

2. In welcher Ordnung weichen die Taylor–Entwicklungen um $x = 0$ von

   (a) $\dfrac{\sin x}{x}$

   (b) $\dfrac{\sinh x}{x}$

   erstmals voneinander ab?
   Vergleichen Sie mit einer Skizze der Funktionen.

3. (a) Zeigen Sie $(e^x)' = e^x$ durch gliedweises Differenzieren der Taylorreihe.

   (b) Leiten Sie die Taylorreihe für $\log(1+x)$ durch gliedweises Integrieren der Reihe für $\dfrac{1}{1+x}$ ab.