Dr. B. Bunk WS 2014/15

Mathematische Grundlagen
Vorlesung 11 – Notizen

Anwendungen von Potenzreihen

Für Addition und Multiplikation von Funktionen, deren Potenzreihen vorliegen, kennen wir schon die Regeln.
Um kompliziertere Funktionen zu entwickeln, wird man selten die Taylorreihe in ihrer ursprünglichen Form berechnen, denn die höheren Ableitungen werden schnell unhandlich. Verschachtelte Ausdrücke führt man (ähnlich wie bei der Kettenregel der Differentiation) auf einfachere Funktionen zurück, deren Entwicklung man kennt, dazu wird man Hilfsgrößen einführen, die selber wieder als Potenzreihen erscheinen. Wie das genau aussieht, werden wir an einigen Beispielen besprechen.
Um einerseits keine Beiträge zu verlieren, andererseits aber auch keine unnötigen Terme zu berechnen, ist es angebracht, die Ordnung des nächsten (nicht mehr berechneten) Terms mit dem $\mathcal{O}(..)$–Symbol anzuzeigen.

Inversion einer Potenzreihe

In einer Übungsaufgabe hatten wir schon das Problem, $1/\cos x$ bis einschließlich $\mathcal{O}(x^4)$ zu entwickeln, das gehen wir jetzt so an:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\cos x} &= \left[1 - \frac{1}{2}\,x^2 + \frac{1}{24}\,x^4 + \mathcal{O}(x^6)\right]^{-1} = \frac{1}{1-u} \\
\text{mit} \quad u &= \frac{1}{2}\,x^2 - \frac{1}{24}\,x^4 + \mathcal{O}(x^6) \;=\; \mathcal{O}(x^2) \\
\Rightarrow \quad \frac{1}{\cos x} &= 1 + u + u^2 + \mathcal{O}(u^3) \\
&= 1 + \left[\frac{1}{2}\,x^2 - \frac{1}{24}\,x^4 + \mathcal{O}(x^6)\right] \\
&\quad + \left[\frac{1}{4}\,x^4 + \mathcal{O}(x^6)\right] + \mathcal{O}(u^3) \\
&= 1 + \frac{1}{2}\,x^2 + \frac{5}{24}\,x^4 + \mathcal{O}(x^6)
\end{aligned}
$$

Hier wurde also erstmal nach u entwickelt (geometrische Reihe). Wegen $u = \mathcal{O}(x^2)$ konnte man mit u^2 aufhören, und auch beim Potenzieren der u kamen wir mit wenigen Termen aus.
Allgemeinere Potenzen, darunter auch Wurzeln wie $\sqrt{1+u}$ und $1/\sqrt{1+u}$ wird man über die Binomische Reihe entwickeln. Der zu entwickelnde Ausdruck sollte selber immer mit 1 beginnen, andernfalls klammert man geeignet aus.

Umkehrfunktion

Aus der Leibnizschen Reihe für $x = \arctan y$ konstruieren wir die Entwicklung von $y = \tan x$:

$$\begin{aligned} x &= \arctan y \;=\; y - \frac{y^3}{3} + \frac{y^5}{5} + \mathcal{O}(y^7) \\ \Rightarrow \quad y &= x + \frac{y^3}{3} - \frac{y^5}{5} + \mathcal{O}(y^7) \\ &= x + \frac{1}{3}\left[x + \frac{y^3}{3} + \mathcal{O}(y^5)\right]^3 - \frac{1}{5}\left[x + \mathcal{O}(y^3)\right]^5 + \mathcal{O}(y^7) \\ &= x + \frac{1}{3}\,x^3 + \frac{2}{15}\,x^5 + \mathcal{O}(x^7) \end{aligned}$$

Verlust der Ordnung

Wir wollen versuchen, für folgenden (trivialen) Ausdruck den führenden Term plus die erste Korrektur zu berechnen:

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{\sin^2}{1 - \cos^2 x} \\ \sin^2 x &= \left[x - \frac{1}{6}\,x^3 + \mathcal{O}(x^5)\right]^2 \;=\; x^2\left[1 - \frac{1}{6}\,x^2 + \mathcal{O}(x^4)\right]^2 \\ &= x^2\left[1 - \frac{1}{3}\,x^2 + \mathcal{O}(x^4)\right] \\ \cos^2 x &= \left[1 - \frac{1}{2}\,x^2 + \mathcal{O}(x^4)\right]^2 \;=\; 1 - x^2 + \mathcal{O}(x^4) \\ \Rightarrow \quad 1 - \cos^2 x &= x^2 + \mathcal{O}(x^4) \\ \Rightarrow \quad 1 &= \frac{x^2[1 - \frac{1}{3}\,x^2 + \mathcal{O}(x^4)]}{x^2[1 + \mathcal{O}(x^2)]} \\ &\overset{?}{=} 1 - \frac{1}{3}\,x^2 + \mathcal{O}(x^2) \end{aligned}$$

Hier wurde also die erste Korrektur nicht voll erfasst, und zwar deshalb, weil sich in $1 - \cos^2 x$ der führende Term $\mathcal{O}(1)$ kompensiert hat. Es wäre also ein weiterer Entwicklungsterm von $\cos^2 x$ nötig gewesen, um die angestrebte Ordnung zu erreichen:

$$\begin{aligned} \cos^2 x &= \left[1 - \frac{1}{2}\,x^2 + \frac{1}{24}\,x^4 + \mathcal{O}(x^6)\right]^2 \\ &= 1 - x^2 + \frac{1}{3}\,x^4 + \mathcal{O}(x^6) \\ \Rightarrow \quad 1 - \cos^2 x &= x^2\left[1 - \frac{1}{3}\,x^2 + \mathcal{O}(x^4)\right] \end{aligned}$$

Grenzwerte von Funktionen

Reihenentwicklungen können auch die Berechnung von Grenzwerten erleichtern, wie das einfache Beispiel

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \;=\; \lim_{x\to 0} \frac{x + \mathcal{O}(x^3)}{x} \;=\; \lim_{x\to 0} [1 + \mathcal{O}(x^2)] \;=\; 1$$

zeigt. Hier war nur die *führende Ordnung* der Sinus–Entwicklung nötig, aber man hätte auch leicht noch den nächsten Term mitnehmen können:

$$\frac{\sin x}{x} \;=\; 1 - \frac{x^2}{6} + \mathcal{O}(x^4)$$

So sieht man, *wie* sich die Funktion dem Grenzwert annähert.
Auch kompliziertere Ausdrücke werden jetzt zugänglich:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} \frac{\log(1+2x^3)}{\sqrt{1+x^2}\sin^2 x \tan 2x} &= \lim_{x\to 0} \frac{2x^3 + \mathcal{O}(x^6)}{[1+\mathcal{O}(x^2)][x^2 + \mathcal{O}(x^4)][2x + O(x^3)]} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{2x^3}{x^2 2x} \;=\; 1 \end{aligned}$$

Wenn der Grenzwert nicht bei $x = 0$ zu nehmen ist, sondern bei $x = a$, dann setzt man $x = a + h$ und entwickelt nach h.
Und wenn z.B. $\lim_{x\to\infty}$ gesucht ist, kann man es mit einer Substitution wie $h = 1/x$ probieren:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\infty} \frac{1+3\sqrt{x}}{\sqrt{3+x}} &= \lim_{h\to 0} \frac{1+3h^{-1}}{\sqrt{3+h^{-2}}} \qquad\qquad h = \frac{1}{\sqrt{x}} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{3+h}{\sqrt{3h^2+1}} \;=\; \lim_{h\to 0} 3\,\frac{1+h/3}{1+\mathcal{O}(h^2)} \;=\; 3 \end{aligned}$$

Wie man sieht, ist die Entwicklungsmethode besonders nützlich bei Grenzwerten von Brüchen, damit ist sie ähnlich, aber nicht deckungsgleich mit der bekannten **Regel von de L'Hospital**: wenn $f(0) = g(0) = 0$, dann gilt

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} \;=\; \lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \;=\; \frac{f'(0)}{g'(0)}$$

wenn der letzte Grenzwert existiert. Damit sind aber auch Fälle erfasst, die sich nicht entwickeln lassen, z.B. $\dfrac{\log x}{x}$ bei $x \to 0$, andererseits sind die Ableitungen bei de L'Hospital oft recht kompliziert und man bekommt nicht das Verhalten *in der Nähe* des Grenzwerts.

Erzeugende Funktionen

Das folgende Beispiel mit der Binomischen Reihe zeigt, wozu Potenzreihen sonst noch fähig sind:

$$\begin{aligned}
(1+x)^\alpha &= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k \\
\Rightarrow \quad (1+x)^\alpha (1+x)^\beta &= \left[\sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k\right] \left[\sum_{l=0}^{\infty} \binom{\beta}{l} x^l\right] \\
= \ (1+x)^{\alpha+\beta} &= \sum_{m=0}^{\infty} \binom{\alpha+\beta}{m} x^m \\
\text{mit} \quad \binom{\alpha+\beta}{m} &= \sum_{k=0}^{m} \binom{\alpha}{k} \binom{\beta}{m-k}
\end{aligned}$$

Der Ausdruck $(1+x)^\alpha$ wird hier also nicht so sehr als Funktion angesehen, die jedem x einen Funktionswert zuweist. Vielmehr spielt x die Rolle eines Parameters, nach dem man entwickelt, um daran die Binomialkoeffizienten abzulesen. Man sagt, $(1+x)^\alpha$ ist die *Erzeugende Funktion* der Bionmialkoeffizienten, und mit ihrer Hilfe konnten wir auf einfache Weise eine *Summenregel* für die Koeffizienten herzuleiten.

Vorlesung 11 – Kontrollfragen

1. Geben Sie für $k = 0, 1, 2, 3$ die Binomialkoeffizienten an:
   (a) $\binom{-1}{k}$
   (b) $\binom{1/2}{k}$
   (c) $\binom{-1/2}{k}$
2. Entwickeln Sie
   (a) $\log(1+\sin x)$ um $x = 0$ bis zur Ordnung x^2
   (b) $\sqrt{1+\tan x}$ um $x = 0$ bis zur Ordnung x^2
   (c) $\dfrac{1}{\log x}$ um $x = 2$ bis zur Ordnung $(x-2)$
3. Finden Sie die Grenzwerte
   (a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\log(1+x)}$
   (b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 3x}{\sin x}$