

# Mathematische Grundlagen

## Vorlesung 12 – Notizen

### Differentialgleichungen

Eine **Differentialgleichung** (DGL) verknüpft eine (unbekannte) Funktion und ihre Ableitungen miteinander. Bei einer **gewöhnlichen** DGL geht es um eine Funktion **einer Variablen**  $y = f(x)$ , die man hier üblicherweise als  $y = y(x)$  schreibt – im Gegensatz zu einer **partiellen** DGL für eine Funktion mehrerer Variablen.

Die höchste vorkommende Ableitung gibt die **Ordnung** der DGL an, eine DGL  $n$ -ter Ordnung hat also die allgemeine Form

$$\Phi(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$$

Einige einfache Beispiele – und ihre Lösungen, die man leicht durch Probieren findet:

$$\begin{aligned} y' &= 2x &\Rightarrow y &= x^2 + C \\ y' &= y &\Rightarrow y &= Ce^x \\ y'' &= -y &\Rightarrow y &= C_1 \cos x + C_2 \sin x \\ y'' &= y' &\Rightarrow y' &= C_1 e^x \Rightarrow y = C_1 e^x + C_2 \\ y' &= g(x) &\Rightarrow y &= \int dx g(x) + C \end{aligned}$$

Hier stehen  $C, C_1, C_2$  für Konstanten, die durch die DGL offensichtlich nicht bestimmt sind. Im letzten Beispiel soll  $g(x)$  eine gegebene Funktion sein, und die DGL verlangt gerade die Berechnung des unbestimmten Integrals als Lösung. Die unbestimmte Konstante ist hier explizit angegeben.

Alle bisher betrachteten DGL sind **linear**: die unbekannt Funktion  $y(x)$  und ihre Ableitungen gehen linear ein. Die allgemeine Form einer linearen DGL  $n$ -ter Ordnung ist

$$a_0(x)y + a_1(x)y' + \dots + a_n(x)y^{(n)} = b(x)$$

Die “Koeffizienten”  $a_0, \dots, a_n$  und  $b$  sind hier *gegebene* Funktionen von  $x$ . Oft sind die  $a_i$  tatsächlich Konstanten, aber im Prinzip sind “beliebige” Abhängigkeiten von der unabhängigen Variablen  $x$  zulässig (aber nicht von  $y$ !).

Wenn der Term  $b(x)$  auf der rechten Seite verschwindet, wird die Gleichung als **homogen linear** bezeichnet.

## Homogene, lineare DGL erster Ordnung

$$\begin{aligned}y' &= a(x)y && \text{ausf\u00fchrlich: } y'(x) = a(x)y(x) \\ \Rightarrow \frac{y'(x)}{y(x)} &= a(x) \\ \Rightarrow \int dx \frac{y'(x)}{y(x)} &= \int dx a(x) \\ \Rightarrow \log y(x) &= \int dx a(x) + \tilde{C} \\ \Rightarrow y(x) &= C e^{\int dx a(x)}\end{aligned}$$

Es geht also darum, die Stammfunktion von  $a(x)$  zu finden, die unbestimmte additive Konstante ist wieder explizit angegeben. Diese Stammfunktion steht im Exponenten der L\u00f6sungsfunktion, mit einem unbestimmten Vorfaktor vor der Exponentialfunktion.

Wie bestimmt man diese Konstante? Tats\u00e4chlich gibt es eine Schar von L\u00f6sungen: [Skizze]

Eine spezielle L\u00f6sungskurve kann man mit einer **Anfangsbedingung** ausw\u00e4hlen: wir beginnen bei  $(x_0, y_0)$ :

$$y_0 = y(x_0)$$

und schreiben die Stammfunktion von  $a(x)$  genauer als

$$\begin{aligned}A(x) &= \int_{x_0}^x d\xi a(\xi) && \text{also } A(x_0) = 0 \\ \Rightarrow y(x) &= y_0 e^{A(x)}\end{aligned}$$

denn die Anfangsbedingung verlangt  $C = y_0$ .

## Inhomogene, lineare DGL erster Ordnung

$$y' = a(x)y + b(x)$$

Hier gibt es einen bew\u00e4hrten Ansatz, der sich an der zuvor gefundenen L\u00f6sung der homogenen Gleichung orientiert, aber die Konstante durch eine (noch zu bestimmende) Funktion ersetzt:

$$\begin{aligned}y &= c(x) e^{A(x)} \\ \Rightarrow y'(x) &= [c'(x) + c(x)A'(x)] e^{A(x)} = [c'(x) + a(x)c(x)] e^{A(x)} \\ &\stackrel{!}{=} a(x)y(x) + b(x) \\ &= a(x)c(x) e^{A(x)} + b(x) \\ \Rightarrow c'(x)e^{A(x)} &= b(x) \Rightarrow c'(x) = b(x)e^{-A(x)} \\ \Rightarrow c(x) &= \int dx b(x) e^{-A(x)} + C\end{aligned}$$

Der Ansatz war also erfolgreich, der Trick heißt **Variation der Konstanten**. Bei der Berechnung von  $c(x)$  tritt wieder eine Integrationskonstante auf, die wir wie zuvor durch eine Anfangsbedingung fixieren können:

$$\begin{aligned} y_0 &= y(x_0) \quad \text{und wieder} \quad A(x_0) = 0 \\ \Rightarrow y_0 &\stackrel{!}{=} c(x_0) \\ \Rightarrow c(x) &= y_0 + \int_{x_0}^x d\xi b(\xi) e^{-A(\xi)} \\ \Rightarrow y(x) &= y_0 e^{A(x)} + \int_{x_0}^x d\xi b(\xi) e^{A(x)-A(\xi)} \end{aligned}$$

### Schwingungsgleichung

Im einfachsten Fall handelt es sich um die *homogene lineare DGL zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten*:

$$y'' + \omega^2 y = 0$$

Man “sieht” unmittelbar die beiden Lösungen

$$y_1(x) = \cos \omega x \quad \text{und} \quad y_2(x) = \sin \omega x$$

Nun gilt für *homogene lineare DGLen* das **Superpositionsprinzip** (*Überlagerungsprinzip*): mit zwei Lösungen  $y_1$  und  $y_2$  ist auch jede Linearkombination  $y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$  (mit konstanten Koeffizienten) eine Lösung. Deshalb lautet die **allgemeine Lösung** unserer Schwingungsgleichung:

$$y(x) = C_1 \cos \omega x + C_2 \sin \omega x$$

Umgekehrt lässt sich jede Lösung so schreiben, und man sagt,  $y_1$  und  $y_2$  bilden ein **Fundamentalsystem**. Es ist nicht eindeutig, man hätte beispielsweise auch  $\cos(\omega x + \phi)$  mit zwei verschiedenen Phasenverschiebungen  $\phi_1$  und  $\phi_2$  wählen können. Die Konstanten  $C_1$  und  $C_2$  sind jetzt durch zwei Bedingungen festzulegen, dabei gibt es verschiedene Möglichkeiten:

- **Anfangsbedingungen** an Wert und erste Ableitung:  
 $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = v_0$ , z.B. Ort und Geschwindigkeit zu einer “Zeit”  $x_0$ ;
- **Randbedingungen** an die Werte an zwei verschiedenen Stellen:  
 $y(x_1) = y_1, y(x_2) = y_2$ , z.B. die festgehaltenen Werte am Rand eines Intervalls.

### Lineare DGL zweiter Ordnung

Die allgemeine Lösung von

$$a_0 y + a_1 y' + a_2 y'' = b$$

(wobei  $a_i$  und  $b$  von  $x$  abhängen können) lässt sich so beschreiben: wenn man eine Lösung der DGL gefunden hat, nämlich die **partikuläre** Lösung  $y_{part}$  und ein Fundamentalsystem von Lösungen  $y_1, y_2$  der homogenen Gleichung (d.h. mit  $b = 0$ ) kennt, dann ist die allgemeine Lösung durch die Schar

$$y(x) = y_{part}(x) + C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$$

gegeben, mit zwei Integrationskonstanten  $C_1, C_2$ .

Bei der Suche nach einer partikulären Lösung ist man oft auf Ansätze und Raten angewiesen, es hängt sehr von der rechten Seite  $b(x)$  ab, was man probieren wird.

## Homogene Gleichung mit konstanten Koeffizienten

Hier bekommt man ein Fundamentalsystem mit einem exponentiellen Ansatz:

$$\begin{aligned} a_0 y(x) + a_1 y'(x) + a_2 y''(x) &= 0 \\ y(x) = e^{\lambda x} \Rightarrow a_0 + a_1 \lambda + a_2 \lambda^2 &= 0 \end{aligned}$$

Der Ansatz ist also erfolgreich: er funktioniert für alle  $x$ , für  $\lambda$  hat man die beiden Lösungen  $\lambda_1, \lambda_2$  einer quadratischen Gleichung zur Verfügung und kann damit das Fundamentalsystem

$$y_1(x) = e^{\lambda_1 x} \quad y_2(x) = e^{\lambda_2 x}$$

aufstellen. Dies ist unproblematisch, wenn  $\lambda_1, \lambda_2$  zwei verschiedene reelle Wurzeln sind, ansonsten sind zwei Besonderheiten sind zu beachten:

- Bei einer Doppellösung  $\lambda_1 = \lambda_2$  ist  $y_2(x) = x e^{\lambda_1 x}$  die zweite Fundamentallösung;
- wenn  $\lambda_1, \lambda_2$  konjugiert komplex sind:  $\lambda_{1,2} = \lambda_r \pm i\omega$ , dann entstehen über die Eulerformel aus  $e^{\pm i\omega x}$  komplexe Schwingungslösungen. Für die allgemeine Lösung wird man  $C_1 y_1 + C_2 y_2$  mit  $C_{1,2} \in \mathbb{C}$  ansetzen, die Rand- bzw. Anfangsbedingungen bringen die Lösung dann ins Reelle zurück.

## Vorlesung 12 – Kontrollfragen

1. Finden Sie die Lösung von

(a)  $y'(x) = 2x + 5$  mit  $y(1) = 10$

(b)  $y'(x) = 3y(x)$  mit  $y(0) = 2$

2. Lösen Sie die Anfangswertprobleme

(a)  $y'(x) = ay(x) + ce^{ax}$

(b)  $y'(x) = ay(x) + (cx + d)e^{ax}$

mit  $y(0) = y_0$  ( $a, c, d = \text{const}$ ).