Dr. B. Bunk WS 2014/15

Mathematische Grundlagen
Vorlesung 13 – Notizen

Freie Schwingung mit Reibung

Wir bezeichnen nun, wie bei Schwingungsproblemen üblich, die Auslenkung als Funktion der Zeit mit $x(t)$ und die Ableitung nach der Zeit t als $\dot{x}(t)$. Dann setzen wir die Masse $m = 1$ und schreiben die Gleichung für eine gedämpfte Schwingung mit linearem Reibungsterm (z.B. Stokessche Reibung) auf:

$$\ddot{x}(t) + r\dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) \quad = \quad 0$$

Ansatz für ein Fundamentalsystem von Lösungen:

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{\lambda t} \\ \Rightarrow \quad \lambda^2 + r\lambda + \omega_0^2 &= 0 \\ \Rightarrow \quad \lambda &= -\frac{r}{2} \pm \sqrt{\frac{r^2}{4} - \omega_0^2} \end{aligned}$$

Ohne Reibung – ungedämpfte Schwingung mit $\omega = \omega_0$:

$$\begin{aligned} r = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda &= \pm i\omega_0 \\ \Rightarrow \quad x(t) &= C_1 \cos\omega_0 t + C_2 \sin\omega_0 t \end{aligned}$$

Schwache Reibung – gedämpfte Schwingung mit $\omega = \omega_1$:

$$\begin{aligned} r < 2\omega_0 \quad \Rightarrow \quad \lambda &= -\frac{r}{2} \pm i\omega_1 \\ \text{mit} \quad \omega_1 &= \sqrt{\omega_0^2 - \frac{r^2}{4}} \\ \Rightarrow \quad x(t) &= \left[C_1 \cos\omega_1 t + C_2 \sin\omega_1 t\right] e^{-\frac{r}{2}t} \end{aligned}$$

Aperiodischer Grenzfall:

$$\begin{aligned} r = 2\omega_0 \Rightarrow \quad \lambda &= \omega_0 \qquad \text{(doppelte Wurzel)} \\ \Rightarrow \quad x(t) &= (C_1 + C_2 t)e^{-\frac{r}{2}t} \end{aligned}$$

Starke Reibung – exponentieller Abfall:

$$\begin{aligned} r > 2\omega_0 \Rightarrow \quad \lambda &= -\rho_{1,2}, \quad \rho_{1,2} > 0 \\ \Rightarrow \quad x(t) &= C_1 e^{-\rho_1 t} + C_2 e^{-\rho_2 t} \end{aligned}$$

Erzwungene Schwingung

Periodischer Antrieb mit Frequenz ω:

$$\ddot{x}(t) + r\dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) \quad = \quad f \cos\omega t$$

Wir suchen erstmal *irgendeine* Lösung der inhomogenen Gleichung und stellen die Frage nach der allgemeinen Lösung zurück.

Partikuläre Lösung

Als Ansatz versuchen wir eine Schwingung mit derselben Frequenz wie der Antrieb, wegen der ersten Ableitung brauchen wir neben $\cos\omega t$ auch einen Term $\sin\omega t$:
$x_{part}(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t$
Das wird kompliziert, deshalb Übergang zur komplexen Form:

$$\begin{aligned}
\ddot{z}(t) + r\dot{z}(t) + \omega_0^2 z(t) &= f\, e^{i\omega t} \\
\text{Ansatz:} \qquad z_{part}(t) &= A\, e^{i\omega t} \qquad A \in \mathbb{C} \\
\Rightarrow \quad A[-\omega^2 + ir\omega + \omega_0^2] &= f \\
\Rightarrow \quad A &= \frac{f}{\omega_0^2 - \omega^2 + ir\omega}
\end{aligned}$$

Wir finden *Resonanz*, d.h. ein Maximum von $|A|$, bei einer Frequenz $\omega = \omega_{res}$, bei der $|\omega_0^2 - \omega_2 + ir\omega|$ minimal ist. Eine Zwischenrechnung (Übungsaufgabe) führt auf

$$\begin{aligned}
\omega_{res} &= \sqrt{\omega_0^2 - \frac{r^2}{2}} \\
|A_{res}| &= \frac{|f|}{r\omega_1}
\end{aligned}$$

Allgemeine Lösung

Die Partikuläre Lösung $z_{part}(t)$ ist natürlich nicht eindeutig, aber jede andere Lösung $z(t)$ hat die Eigenschaft, dass $z(t) - z_{part}(t)$ die *homogene* Schwingungsgleichung erfüllen muss, und deren allgemeine Lösung haben wir im vorigen Abschnitt schon diskutiert. Deshalb gilt für lineare DLGen der wichtige Satz: die **allgemeine Lösung** der inhomogenen Gleichung erhält man als Summe aus *einer* partikulären Lösung und der *allgemeinen* Lösung der homogenen Gleichung:

$$z(t) \quad = \quad z_{part}(t) + z_{hom}(t)$$

Zur Anpassung an Anfangsbedingungen dienen dabei die in $z_{hom}(t)$ enthaltenen Integrationskonstanten.
Nun hat es sich in unserem Beispiel gezeigt, dass alle Lösungen der homogenen Gleichung wegen des Reibungsterms exponentiell abklingen. Deshalb dient $z_{hom}(t)$ nur dazu, das Einschwingverhalten an die Anfangsbedingungen anzupassen, während langfristig die erzwungene Schwingung aus $z_{part}(t)$ allein überlebt.

Beispiel: nichtlineare DGL erster Ordnung

Damit nicht der Eindruck entsteht, nur lineare DGLen seinen behandelbar, soll hier kurz eine Klasse nichtlinearer DGLen angesprochen werden, mit der man noch relativ gut zurecht kommt:

$$y' = a(x)\, b(y)$$

Die Nichtlinearität liegt hier in $b(y)$, aber sie ist speziell: wegen der faktorisierten Form der rechten Seite spricht man von **getrennten Variablen**. Daraus ergibt sich auch ein (zunächst formales) Lösungsverfahren: man bringt $b(y)$ auf die linke Seite, geht zur Stammfunktion über und benutzt $y'(x)$ zum Wechsel auf die Variable y:

$$\frac{y'(x)}{b(y(x))} = a(x)$$

$$\begin{aligned} \int dx\, \frac{y'(x)}{b(y(x))} &= \int dx\, a(x) + C \\ \Rightarrow \quad \int dy\, \frac{1}{b(y)} &= \int dx\, a(x) + C \end{aligned}$$

Man kann auch gleich das Anfangswertproblem $y(x_0) = y_0$ in die Integrationsgrenzen einbauen:

$$\int_{y_0}^{y} d\eta\, \frac{1}{b(\eta)} = \int_{x_0}^{x} d\xi\, a(\xi)$$

Im konkreten Fall ist allerdings (wie bei allen nichtlinearen Problemen) große Vorsicht nötig: der betrachtete Zweig der Lösung sollte eine monotone Funktion $y(x)$ sein (wegen der Substitution im Integral) und auch Nullstellen von $b(y)$ sind zu meiden (Nenner!). Schließlich gibt die Lösungsformel nur einen impliziten Zusammenhang zwischen x und y, der sich nicht unbedingt explizit nach y auflösen lässt.

Vorlesung 13 – Kontrollfragen

1. Die Amplitude der erzwungenen Schwingung hat bei $\omega = \omega_0$ den Wert

$$A \;=\; \frac{f}{ir\omega_0}$$

   Was bedeutet das für die Phasenlage der Schwingung, relativ zum Antrieb?

2. Der Nenner von

$$A \;=\; \frac{f}{\omega_0^2 - \omega^2 + ir\omega}$$

   bildet $\omega \in [0, \infty)$ auf eine Kurve in der komplexen Ebene ab.

   (a) Skizzieren und charakterisieren Sie diese Kurve.

   (b) Wie sieht sie für sehr schwache Reibung aus?

   (c) Wo findet man dann den Resonanzpunkt?

   (d) Was erwartet man für die Phase der erzwungenen Schwingung bei Resonanz?

3. Bei linearer (Stokesscher) Reibung wird eine ansonsten kräftefreie Bewegung abgebremst gemäß

$$\dot{v} \;=\; -rv(t) \qquad v(0) \;=\; v_0$$

   (a) Was ergibt sich für $v(t)$?

   (b) Wie lang ist der Bremsweg?

4. ♡ Wiederholen Sie die vorangehende Aufgabe mit quadratischer (Newtonscher) Reibung:

$$\dot{v} \;=\; -rv(t)^2 \quad (v \geq 0) \qquad v(0) \;=\; v_0 > 0$$

Aufgaben mit ♡ sind für Liebhaber, ihre Lösung ist nicht nötig zum Verständnis der "Mathematischen Grundlagen".