Dr. B. Bunk WS 2014/15

Mathematische Grundlagen *

Vorlesung 14 – Notizen

Klausurtermin: Freitag, 12. 12. 2014, 17:00 - 18:30
Ort: RUD 26 (Erwin-Schrödinger-Zentrum), 0'110 + 0'115
Anmeldung in AGNES bis 8. 12. 2014

Krummlinige Koordinaten

Polarkoordinaten

[Skizze]

$$\begin{array}{rrcl} & x & = & r\cos\varphi \\ & y & = & r\sin\varphi \\ \Leftrightarrow & r & = & \sqrt{x^2+y^2} \ \geq \ 0 \\ & \varphi & = & \begin{cases} \arctan\frac{y}{x} & x \geq 0 \\ \arctan\frac{y}{x}+\pi & x < 0 \end{cases} \end{array}$$

Ellipse

Ellipsengleichung in Cartesischen Koordinaten:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} \ = \ 1 \qquad a \geq b > 0$$

[Skizze]
Die Ellipse hat ihr **Zentrum** im Nullpunkt und zwei **Brennpunkte** bei $x = \pm e, y = 0$ mit *Exzentrizität*

$$e \ = \ \sqrt{a^2-b^2}$$

Sie ist dadurch charakterisiert, dass die *Summe der Abstände* von den beiden Brennpunkten konstant ist:

$$\begin{array}{rcl} r_1 & = & \sqrt{(x+e)^2+y^2} \\ r_2 & = & \sqrt{(x-e)^2+y^2} \\ r_1+r_2 & = & \text{const} \ = \ 2a \end{array}$$

*http://www-com.physik.hu-berlin.de/~bunk/mathgrund

Beweis:

$$
\begin{aligned}
r_{1,2}^2 &= (x \pm e)^2 + y^2 \\
&= (x^2 \pm 2ex + e^2) + b^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) \\
&= a^2 \pm 2ex + x^2 \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right) \\
&= a^2 \pm 2ex + \frac{e^2}{a^2}\, x^2 \;=\; \left(a \pm \frac{e}{a}\, x\right)^2 \\
\Rightarrow \quad r_{1,2} &= a \pm \frac{e}{a}\, x \qquad \Rightarrow \quad r_1 + r_2 \;=\; 2a
\end{aligned}
$$

Für $a = b \Rightarrow e = 0$ hat man natürlich einen Kreis mit Radius a.
Darstellung der Ellipse in Polarkoordinaten *bzgl. des rechten Brennpunkts*:
[Skizze]

$$
\begin{aligned}
r &= r_2 \;=\; a - \frac{e}{a}\, x \;=\; a - \frac{e}{a}(e + r\cos\varphi) \;=\; \frac{b^2}{a} - \frac{e}{a}\, r\cos\varphi \\
\Rightarrow \quad r(\varphi) &= \frac{k}{1 + \epsilon \cos\varphi} \\
\text{mit} \quad \epsilon &= \frac{e}{a} \;<\; 1 \qquad\qquad k \;=\; \frac{b^2}{a}
\end{aligned}
$$

ϵ heißt *numerische Exzentrizität*.

Hyperbel

Hyperbelgleichung in Cartesischen Koordinaten:

$$
\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \;=\; 1 \quad a, b > 0
$$

[Skizze]
Die Ellipse hat *zwei Äste*, die sich von $x = \pm a, y = 0$ aus nach außen öffnen, die beiden **Brennpunkte** liegen bei $x = \pm e, y = 0$ mit

$$
e \;=\; \sqrt{a^2 + b^2}
$$

Diesmal ist auf den Hyperbelästen die *Differenz der Abstände* von den beiden Brennpunkten konstant:

$$
\begin{aligned}
r_1 &= \sqrt{(x + e)^2 + y^2} \\
r_2 &= \sqrt{(x - e)^2 + y^2} \\
|r_1 - r_2| &= \text{const} \;=\; 2a
\end{aligned}
$$

denn wir können die obige Rechnung wiederholen (formal: $b^2 \to -b^2$) und finden

$$\begin{array}{rcl} r_{1,2} & = & \left|a \pm \frac{e}{a}\,x\right| \\ \text{rechter Ast:} \quad x \geq a \quad \Rightarrow & & r_1 = a + \frac{e}{a}\,x \quad r_2 = -a + \frac{e}{a}\,x \quad r_1 - r_2 = 2a \\ \text{linker Ast:} \quad x \leq -a \quad \Rightarrow & & r_1 = -a - \frac{e}{a}\,x \quad r_2 = a - \frac{e}{a}\,x \quad r_1 - r_2 = -2a \end{array}$$

In Polarkoordinaten stellt sich der linke Ast bzgl. seines Brennpunkts so dar:

$$\begin{array}{rcl} r(\varphi) & = & \dfrac{k}{1 + \epsilon \cos\varphi} \\ \text{mit} \quad \epsilon & = & \dfrac{e}{a} \; > \; 1 \\ \varphi & \in & (-\varphi_\infty, \varphi_\infty) \qquad \varphi_\infty \; = \; \arccos\dfrac{-1}{\epsilon} \\ k & = & \dfrac{b^2}{a} \end{array}$$

Die Grenzwinkel $\pm\varphi_\infty$ geben die asymptotischen Richtungen an, in denen die Hyperbel ins Unendliche läuft.

Parabel

Die Parabel ist der Grenzfall zwischen Ellipse und Hyperbel. Beginnen wir diesmal in Polarkoordinaten und setzen $\epsilon = 1$:

$$r(\varphi) \; = \; \frac{k}{1 + \cos\varphi}$$

[Skizze]
Übergang zu Cartesischen Koordinaten, mit Ursprung im Scheitel der Parabel:

$$\begin{array}{rcl} r\cos\varphi & = & \dfrac{k}{2} + x \\ r\sin\varphi & = & y \end{array}$$

So bekommt man die Parabel in etwas ungewohnter Lage:

$$\begin{array}{rcl} r + \left(\dfrac{k}{2} + x\right) & = & k \\ \Rightarrow \quad \left(\dfrac{k}{2} + x\right)^2 + y^2 & = & \left(\dfrac{k}{2} - x\right)^2 \\ \Rightarrow \quad y^2 & = & -2kx \end{array}$$

Damit sind nun alle drei Kegelschnitte in Polarkoordinaten einheitlich dargestellt: im Zentrum liegt ein Brennpunkt, und bei $\varphi = 0$ ist der Abstand am geringsten (astronomisch: *Perihel*).

Vorlesung 14 – Kontrollfragen

1. Wo liegen Zentrum und Brennpunkte der folgenden Ellipsen:
   (a) $3x^2 + 7y^2 = 21$
   (b) $\frac{1}{3}(x-2)^2 + (y+3)^2 = 1$
2. Wie sieht die Gleichung der Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ aus, wenn man sie in Polarkoordinaten bzgl. des *Zentrums* schreibt: $r = r(\varphi) = ??$
3. Wo liegt der Brennpunkt der Parabel $y = x^2$?
4. ♡ Wir betrachten Strahlen, die parallel zu y–Achse einfallen und an der Parabel $y = \frac{1}{4}x^2$ reflektiert werden.
   (a) Zeigen Sie, dass der Strahl mit $x = 2$ in den Brennpunkt reflektiert wird.
   (b) Können Sie das auch allgemein für achsenparallele Strahlen beweisen?

Aufgaben mit ♡ sind für Liebhaber, ihre Lösung ist nicht nötig zum Verständnis der "Mathematischen Grundlagen".