

# Mathematische Grundlagen \*

## Vorlesung 15 – Notizen

**Klausurtermin: Freitag, 12. 12. 2014, 17:00 - 18:30**

**Ort: RUD 26 (Erwin-Schrödinger-Zentrum), 0'110 + 0'115**

**Anmeldung in AGNES bis 8. 12. 2014**

**Hilfsmittel:** 1 A4-Blatt (beidseitig) mit Notizen, **keine** Bücher, **kein** Taschenrechner

**Hinweis:** Einschreibung/Belehrung zum **Einführungspraktikum** am Donnerstag, 11. 12. 2014, 11:15 Uhr, Hörsaal 0'07 – **Präsenzpflicht!**

### Zylinderkoordinaten

[Skizze]

$$\begin{aligned}x &= r \cos \phi \\y &= r \sin \phi \\z &= z \\ \Rightarrow r &= \sqrt{x^2 + y^2} \geq 0 \\ \phi &= \arctan \frac{y}{x} \quad \{+\pi\} \in [0, 2\pi)\end{aligned}$$

### Kugelkoordinaten

[Skizze]

$$\begin{aligned}x &= r \sin \theta \cos \phi \\y &= r \sin \theta \sin \phi \\z &= r \cos \theta \\ \Rightarrow r &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \geq 0 \\ \theta &= \arccos \frac{z}{r} \in [0, \pi] \\ \phi &= \arctan \frac{y}{x} \quad \{+\pi\} \in [0, 2\pi)\end{aligned}$$

---

\*<http://www-com.physik.hu-berlin.de/~bunk/mathgrund>

# Gebietsintegrale

## Definition

[Skizze]

In Anlehnung an die Definition des Riemann-Integrals über ein Intervall kann man das Integral über ein *Gebiet*  $G$  in der  $(x, y)$ -Ebene etwa so einführen: wir *rastern* das Gebiet, indem wir es durch Rechtecke  $g_i, i = 1..N$  der Größe  $\Delta x_i \times \Delta y_i$  ausfüllen. In jedem  $g_i$  wählen wir einen Stützpunkt  $(x_i, y_i)$ . Nun verfeinern wir die Rasterung ( $N \rightarrow \infty$ ), so dass alle  $g_i$  (dem Durchmesser nach) klein werden und im Grenzfall ganz  $G$  überdecken, und definieren das Gebietsintegral

$$\begin{aligned} I_G &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N \Delta x_i \Delta y_i f(x_i, y_i) \\ &= \iint_G dx dy f(x, y) \end{aligned}$$

wenn der Grenzwert existiert und von der Folge der Rasterungen unabhängig ist. Im 3-dimensionalen Raum (und in höheren Dimensionen) definieren wir ebenso:

$$I_G = \iiint_G dx dy dz f(x, y, z) \quad \text{usw.}$$

## Sukzessive Ausführung

Beispiel zur Ausführung: Integral über ein Rechteck  $G : x \in [a, b], y \in [c, d]$ :

$$\begin{aligned} I &= \iint_G dx dy f(x, y) \\ &= \int_a^b dx \left[ \int_c^d dy f(x, y) \right] \\ &= \int_c^d dy \left[ \int_a^b dx f(x, y) \right] \end{aligned}$$

Das 2-dimensionale Integral wird also in zwei ineinander verschachtelte, gewöhnliche Integrale zerlegt. Das *innere* Integral wird zuerst ausgerechnet, wobei die *äußere* Variable zunächst als Parameter festgehalten wird. Man integriert also "in Streifen". Die Wahl der Reihenfolge ist frei. Die eckigen Klammern sind nur der Deutlichkeit halber gesetzt, gewöhnlich lässt man sie weg und integriert sukzessiv "von innen nach außen".

Beispiel:

$$\begin{aligned}
 f(x, y) &= x + y^2 \\
 \Rightarrow I &= \int_a^b dx \int_c^d dy (x + y^2) \\
 &= \int_a^b dx \left[ xy + \frac{1}{3}y^3 \right]_{y=c}^d \\
 &= \int_a^b dx \left[ x(d - c) + \frac{1}{3}(d^3 - c^3) \right] \\
 &= \left[ \frac{1}{2}x^2(d - c) + \frac{1}{3}(d^3 - c^3)x \right]_{x=a}^b \\
 &= \frac{1}{2}(b^2 - a^2)(d - c) + \frac{1}{3}(d^3 - c^3)(b - a)
 \end{aligned}$$

Dasselbe hätte man auch bekommen, wenn man erst *innen* über  $x$  integriert hätte und dann das Resultat über  $y$ .

Wenn das Gebiet kein Rechteck ist, tritt eine Komplikation auf: nicht nur der Integrand, sondern auch die **Grenzen** der inneren Integration hängen jetzt von der äußeren Variablen ab.

Als Beispiel ein Integral über das Dreieck  $\Delta : \{x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}$ :

$$\begin{aligned}
 \iint_{\Delta} dx dy x^2 y &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy x^2 y \\
 &= \int_0^1 dx x^2 \frac{1}{2} [y^2]_0^{1-x} = \int_0^1 dx x^2 \frac{1}{2} (1-x)^2 = \dots = \frac{1}{60}
 \end{aligned}$$

## Flächeninhalt und Schwerpunkt

Das Integral über ein zweidimensionales Gebiet  $G$  mit Integrand 1 gibt natürlich gerade den Flächeninhalt von  $G$ , z.B. für das soeben definierte Dreieck:

$$F_{\Delta} = \iint_{\Delta} dx dy 1 = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy = \int_0^1 dx (1-x) = \frac{1}{2}$$

Eine andere Anwendung ist die Berechnung des Schwerpunkts einer Fläche (mit homogener Dichte):

$$\begin{aligned}
 x_s &= \frac{\iint_G dx dy x}{F_G} \\
 y_s &= \frac{\iint_G dx dy y}{F_G}
 \end{aligned}$$

Nehmen wir wieder unser Dreieck:

$$\begin{aligned} \iint_{\Delta} dx dy x &= \int_0^1 dx x \int_0^{1-x} dy = \int_0^1 dx x(1-x) = \frac{1}{6} \\ \Rightarrow x_s &= \frac{1}{3} \quad \text{etc} \end{aligned}$$

## Kreis in Cartesischen Koordinaten

Berechnung der Kreisfläche  $x^2 + y^2 \leq R^2$ :

$$\begin{aligned} \iint dx dy &= \int_{-R}^R dx \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} dy \\ &= \int_{-R}^R dx 2\sqrt{R^2-x^2} \quad x = R \cos \varphi \quad dx = -R d\varphi \sin \varphi \\ &= R^2 \int_0^{\pi} d\varphi 2 \sin^2 \varphi \\ &= R^2 \int_0^{\pi} d\varphi (1 - \cos 2\varphi) \\ &= \pi R^2 \end{aligned}$$

Das ist natürlich die richtige Kreisfläche, aber in Cartesischen Koordinaten sehr unbequem zu rechnen. Deshalb werden wir uns überlegen, wie man Gebietsintegrale in Polar- und Kugelkoordinaten schreiben kann.

## Vorlesung 15 – Kontrollfragen

1. Berechnen Sie

(a)  $\iint dx dy (x + y)$  über  $|x| \leq 1, |y| \leq 2$

(b)  $\iint dx dy 1$  über das Quadrat mit Eckpunkten  $(\pm 2, 0)$  und  $(0, \pm 2)$

2. Berechnen Sie den Schwerpunkt des Dreiecks, das von den Punkten  $(1, 0), (-1, 0), (0, 2)$  gebildet wird.

3. Was ist falsch an folgender Rechnung:

$$\begin{aligned} \iint dx dy x &\quad \text{über } 0 \leq x \leq y \leq 1 \\ &= \int_0^1 dx \int_0^x dy x = \int_0^1 dx x^2 = \frac{1}{3} \end{aligned}$$