

Mathematische Grundlagen *

Vorlesung 16 – Notizen

Hinweis: Einschreibung/Belehrung zum **Einführungspraktikum**
am Donnerstag, 11. 12. 2014, 11:15 Uhr, Hörsaal 0'07 – **Präsenzpflicht!**

Klausurtermin: Freitag, 12. 12. 2014, 17:00 - 18:30

Ort: RUD 26 (Erwin-Schrödinger-Zentrum), 0'110 + 0'115

Anmeldung in AGNES bis 8. 12. 2014

Mitbringen: Lichtbildausweis **und** Studentenausweis!

Hilfsmittel: 1 A4-Blatt mit **handschriftlichen** Notizen (beidseitig),
keine Bücher, **kein** Taschenrechner. Die Tabelle der elementaren Ableitungen (Rück-
seite von Übungsblatt 9) wird bereitgestellt.

Flächen– und Volumenelemente

Ebene Polarkoordinaten

[Skizze]

$$dx dy = dr r d\phi$$

Zylinderkoordinaten

[Skizze]

$$dx dy dz = dr r d\phi dz$$

Kugelkoordinaten

[Skizze]

$$dx dy dz = dr r^2 d\theta \sin \theta d\phi$$

*<http://www-com.physik.hu-berlin.de/~bunk/mathgrund>

Bemerkungen

Im Zuge der Rechnung kann man ohne weiteres *einzelne* Variablen substituieren, wobei die anderen Variablen wie Konstanten behandelt werden. Ein einfaches Beispiel ist eine Substitution für θ , die sich in Kugelkoordinaten häufig anbietet:

$$\begin{aligned} u &= \cos \theta & du &= -d\theta \sin \theta \\ \Rightarrow \int_0^\pi d\theta \sin \theta \dots &= \int_{-1}^1 du \dots \end{aligned}$$

Die gleichzeitige Transformation *mehrerer* Variablen ist auch möglich, verlangt aber eine tiefere Diskussion von krummlinigen Koordinaten.

Überlegungen bei mehrdimensionaler Integration:

- Art der Koordinaten (Symmetrie!)
- Wahl des Nullpunkts und ggf. der Achse
- Reihenfolge der sukzessiven Integrationen

Volumen einer Kugel

Das ist jetzt denkbar einfach zu berechnen:

$$V = \int_0^R dr r^2 \int_{-1}^1 du \int_0^{2\pi} d\phi = \frac{R^3}{3} \times 2 \times 2\pi = \frac{4\pi}{3} R^3$$

Schwerpunkt einer Halbkugel

Natürlich in Kugelkoordinaten.

$$\begin{aligned} \iiint dx dy dz x &= \iiint dx dy dz y = 0 \\ \iiint dx dy dz z &= \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi/2} d\theta \sin \theta \int_0^R dr r^2 r \cos \theta \\ &= 2\pi \int_0^1 du u \int_0^R dr r^3 = 2\pi \times \frac{1}{2} \times \frac{R^4}{4} = \frac{\pi}{4} R^4 \\ \Rightarrow z_s &= \frac{\frac{\pi}{4} R^4}{\frac{2\pi}{3} R^3} = \frac{3}{8} R \end{aligned}$$

Kugelabschnitt

Volumen berechnen, in Kugelkoordinaten:

[Skizze]

Integrations-Grenzen und -Reihenfolge:

$$\begin{aligned}r \cos \theta &\geq R - h \\ru &\geq R - h \quad \text{mit } u = \cos \theta \\r_{min} &= R - h \\\cos \theta_{max} &= \frac{R - h}{R} = u_{min} \\V &= \int_0^{2\pi} d\phi \int_{R-h}^R dr r^2 \int_{\frac{R-h}{r}}^1 du \\&= \int_0^{2\pi} d\phi \int_{\frac{R-h}{R}}^1 du \int_{\frac{R-h}{u}}^R dr r^2\end{aligned}$$

Nehme die erste Version:

$$\begin{aligned}V &= 2\pi \int_{R-h}^R dr r^2 \left(1 - \frac{R-h}{r}\right) \\&= 2\pi \left\{ \frac{1}{3}[R^3 - (R-h)^3] - (R-h) \frac{1}{2}[R^2 - (R-h)^2] \right\} \\&= \dots \\&= \pi \left(R - \frac{h}{3}\right) h^2\end{aligned}$$

Tatsächlich ist die Rechnung in Zylinderkoordinaten einfacher – siehe Kontrollfrage.

Volumen eines Torus

Die Symmetrie legt Zylinderkoordinaten nahe.

“zentraler” Kreis: $x = R \cos \phi, y = R \sin \phi, z = 0$

“kleiner” Radius: a

[Skizze]

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-a}^a dz \int_{r_1}^{r_2} dr r \\ r_{1,2} &= R \mp \sqrt{a^2 - z^2} \\ \Rightarrow V &= 2\pi \int_{-a}^a dz \frac{1}{2}(r_2^2 - r_1^2) \\ &= 2\pi \int_{-a}^a dz \frac{1}{2}(r_2 + r_1)(r_2 - r_1) \\ &= 4\pi R \int_{-a}^a dz \sqrt{a^2 - z^2} \\ &= 4\pi R \times \frac{\pi}{2} a^2 = 2\pi^2 R a^2 \end{aligned}$$

Das letzte Integral hatten wir schon (s. Kreisfläche in Cartesischen Koordinaten).

Vorlesung 16 – Kontrollfragen

1. Wiederholen Sie die Berechnung des Kugelabschnitts aus der Vorlesung – diesmal in Zylinderkoordinaten!
2. (a) Wie groß ist das Volumen zwischen dem *Paraboloid* $z = x^2 + y^2$ und der Ebene $z = 1$?
(b) Wenn Ihnen das zu einfach war – wo liegt der Schwerpunkt dieses Körpers?