



Physikalisches Grundpraktikum II
Wechselstromwiderstände E4

Daniel Kohl - XXXXXX

March 17, 2022

Student:	Daniel Kohl (Matrikelnummer) daniel.kohl@physik.hu-berlin.de
Partner:	Julian Rypalla (Matrikelnummer)
Versuchsdurchführung:	15.01.2019
Messplatz:	Platz 3
Gruppe:	Nummer E5

Inhaltsverzeichnis

1	Abstract	1
2	Grundlagen und Versuchsdurchführung	2
3	Messwerte und Berechnung	3
3.1	Kondensator als linearer Zweipol	3
3.2	Spule als linearer Zweipol	7
3.3	Phasenverschiebung der Spulenspannung	10
3.4	Bestimmung der Resonanzfrequenz	12
3.5	Reihenschwingkreis als linearer Zweipol	15
4	Auswertung und Fehlerbetrachtung	20
5	Anhang und Literatur	22

1 Abstract

Im Versuch werden ein Kondensator, eine Spule und ein Reihenschwingkreis aus beiden als lineare Zweipole auf ihre Wechselstromwiderstände untersucht. Dabei werden die komplexen Widerstände bezüglich ihrer Frequenzabhängigkeit überprüft und die Resonanzfrequenz des Schwingkreises bestimmt.

Multimeter Messung	Kondensator als Zweipol	Spule als Zweipol	Schwingkreis als Zweipol
$C = (95 \pm 1)\text{nF}$	$C = (98 \pm 1.0)\text{nF}$	$L = (530 \pm 10)\text{mH}$	$C = (98.7 \pm 1.1)\text{nF}$
$R_L = (150.0 \pm 1.6)\Omega$		$R_L = (148 \pm 4)\Omega$	$L = (476 \pm 5)\text{mH}$
			$R_L = (272 \pm 1.0)\Omega$
			$f_{rech} = (698 \pm 8)\text{Hz}$
			$f_{exp} = (734.3 \pm 0.4)\text{Hz}$

Die Ergebnisse des Experiments decken sich mit den Erwartungen aus den Gesetzen für Wechselstromwiderstände. Die bestimmten Kapazitäten stimmen überein. Das Experiment hat gezeigt, dass sich der Widerstand der Spule im Wechselstromkreis erhöht, da im Weicheisenkern Wirbelströme erzeugt werden und es daher zu Energiedissipation kommt. Bei der Spule kam es zu einer Abweichung der Messergebnisse. Diese sollten bei einer möglichen Wiederholung des Versuchs weiter untersucht werden.

Protokoll - Wechselstromwiderstände

2 Grundlagen und Versuchsdurchführung

Im Folgenden sollen die Widerstandseigenschaften von linearen Zweipolen in Wechselstromschaltkreisen untersucht werden. Während der Widerstand bei Gleichspannung konstant ist, haben Kondensatoren, Spulen und Schwingkreise bei Wechselspannung einen frequenzabhängigen Widerstand. Ziel des Versuch ist es die Frequenzabhängigkeit des Wechselstromwiderstands eines Kondensators, einer Spule und eines Reihenschwingkreises zu untersuchen. Der Schwingkreis enthält eine Spule und einen Kondensator. Aus Physikalischen Überlegungen folgen folgende zwei Annahmen für die Frequenzabhängigkeit der Bauteile:

$$Z_R = R \quad (1)$$

$$Z_C = \frac{1}{i \cdot 2\pi \cdot f \cdot C} \quad (2)$$

$$Z_L = i \cdot 2\pi \cdot f \cdot L \quad (3)$$

Für Schaltungen aus mehreren solcher komplexen Widerstände gälten die Gesetze für den Zusammenschluss mehrerer Elektrischer Bauteile. Wir betrachten im Folgenden jeweils die reelwertigen Beträge dieser Widerstände. Es folgt für die Spule, mit ihrem ohmschen Innenwiderstand, für ihre gesamt Impedanz:

$$|Z_L| = \sqrt{R_L^2 + (2\pi \cdot f \cdot L)^2}$$

Es wird folgende Schaltung aufgebaut:

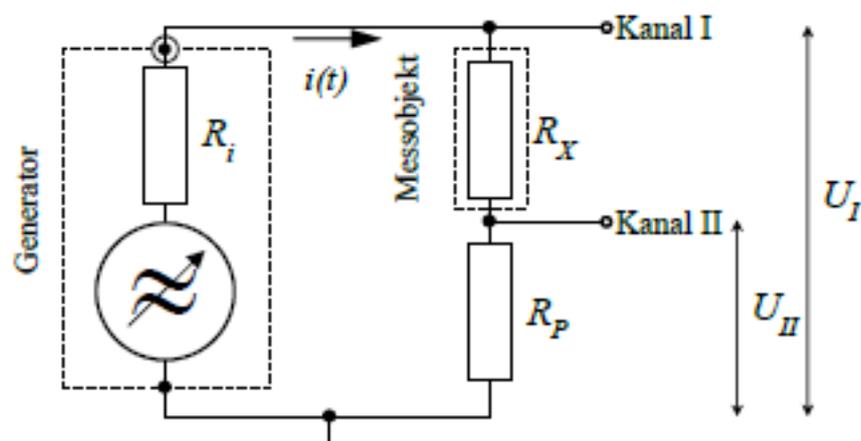


Abb. 1: Aufbau der Schaltung zum Messen der Impedanz eines Zweipols, Quelle: [1]

Ein Wechselspannungsgenerator erzeugt die Ausgangsspannung mit der Frequenz f . Diese fällt über dem Zweipol und einem festen, bekannten ohmschen Widerstand ab. Mit einem

Oszilloskop werden die Abfallenden Spannungen über dem gesamten System und über dem Widerstand gemessen. Daraus lässt sich dann der Betrag der Impedanz für den Zweipol bestimmen, mit:

$$|Z| = |R_x| = R_p \cdot \frac{U_{SS}^{Kanal I} - U_{SS}^{Kanal II}}{U_{SS}^{Kanal II}} \quad (4)$$

Diese Werte sollen dann auf ihre Frequenzabhängigkeit überprüft werden und außerdem bestimmen wir bei der Spule die Phasenverschiebung zur Spannung über dem ohmschen Widerstand. Die Spannung über dem ohmschen Widerstand hat keine Phasenverschiebung zum Strom, folglich entspricht dies auch für die Spule der Phasenverschiebung zum Strom in der Spule.

Eine Ausführliche Versuchsbeschreibung und nähere physikalische Betrachtungen sind im Skript zu diesem Versuch gegeben [1].

3 Messwerte und Berechnung

Zu Beginn des Versuchs werden, als spätere Vergleichswerte, die Kapazität des Kondensators und der ohmsche Widerstand der Spule gemessen.

$$C = (95 \pm 4)\text{nF}$$

$$R_L = (150.0 \pm 1.6)\Omega$$

Die Unsicherheiten beider Messwerte sind durch die Herstellerangaben des Messgerätes gegeben. Die Kapazitätsmessung hat eine Unsicherheit von 3 % des Messwertes plus 5 letzte signifikante Digits und die Widerstandsmessung mit 0.8 % und 4 LSD.

3.1 Kondensator als linearer Zweipol

Für die erste Messreihe wird die Schaltung nach Abb.1 aufgebaut und als Zweipol der Kondensator eingeschaltet. Über das Oszilloskop werden auf zwei Kanälen, die Spannung über dem gesamten System gemessen und auf dem zweiten Kanal die Spannung, die über dem ohmschen Widerstand abfällt. Die Frequenz wird variiert und ihr Wert wird am Frequenzgenerator abgelesen werden.

Kondensator als linearer Zweipol

Frquenz in Hz	Kanal I			Kanal II		
	Div	V/Div	U_1 in V	Div	V/Div	U_2 in V
1038 ± 1	2.2	5	11.0 ± 0.5	1.3	0.05	0.065 ± 0.005
2037 ± 1	2.2	5	11.0 ± 0.5	2.5	0.05	0.125 ± 0.005
3002 ± 1	2.2	5	11.0 ± 0.5	1.9	0.1	0.19 ± 0.01
4042 ± 1	2.2	5	11.0 ± 0.5	2.6	0.1	0.26 ± 0.01
5009 ± 1	2.2	5	11.0 ± 0.5	1.6	0.2	0.32 ± 0.02
6026 ± 1	2.1	5	10.5 ± 0.5	1.9	0.2	0.38 ± 0.02
7054 ± 1	2.1	5	10.5 ± 0.5	2.2	0.2	0.44 ± 0.02
8061 ± 1	2.1	5	10.5 ± 0.5	2.5	0.2	0.50 ± 0.02
9003 ± 1	2.1	5	10.5 ± 0.5	2.8	0.2	0.56 ± 0.02
9980 ± 1	2.0	5	10.0 ± 0.5	3.0	0.2	0.60 ± 0.02

Die Messunsicherheiten der Werte in der Tabelle wurden wie folgt bestimmt. Die Unsicherheit des Frequenzmessgerätes wurde mit einer vorletzten Stelle der Digitalanzeige abgeschätzt. Die Werte von Div für beide Kanäle des Oszilloskopes wurden am Bildschirm des Oszilloskops abgelesen. Die Unsicherheit wurde mit einer halben, kleinsten Skaleneinteilung (0,1 Div) abgeschätzt und mit der Skalierung (V/Div) multipliziert. Damit wurde die Gesamtunsicherheit für die Spannung abgeschätzt.

Untersucht werden soll der Zusammenhang zwischen der Frequenz und dem Widerstand des Kondensators. Aus dem Skript folgt die Gleichung zu Bestimmung des Betrags vom komplexen Widerstand:

$$|Z| = |R_x| = R_p \cdot \frac{U_{SS}^{Kanal I} - U_{SS}^{Kanal II}}{U_{SS}^{Kanal II}}$$

Mit U_{SS} ist hier die Spitze zu Spitze Spannung gemeint. Im Experiment wurde stets die Spitzenspannung in eine Richtung bestimmt. Es kommt ein Faktor 2 hinzu. Da auch der Vorwiderstand bekannt ist, kann mit Hilfe der Formel $|Z|$ bestimmt werden:

Komplexer Widerstand des Kondensator

f in Hz	u_f in Hz	$ Z $ in Ω	u_Z in Ω
1038	1	1680	160
2037	1	870	60
3002	1	570	50
4042	1	413	26
5009	1	334	27
6026	1	266	20
7054	1	229	16
8061	1	200	13
9003	1	178	11
9980	1	160	10

Der Fehler des bestimmten Widerstandes wurde durch gaußsche Fehlerfortpflanzung bestimmt. Es gab keine angegebene Unsicherheit für den Widerstand, daher wurde der Widerstand vermessen und der Fehler des Messgerätes als Unsicherheit des Widerstands verwendet:

$$R_p = (9.95 \pm 0.12)\Omega$$

$$u_R = 9.95\Omega \cdot 0.8\% \pm 4\text{LSD}$$

Damit ist u_Z :

$$u_Z = \sqrt{\left(\frac{U_{SS}^{\text{Kanal I}} - U_{SS}^{\text{Kanal II}}}{U_{SS}^{\text{Kanal II}}} \cdot u_R\right)^2 + \left(\frac{R_p}{U_{SS}^{\text{Kanal II}}} \cdot u_{U_{SS}^{\text{Kanal I}}}\right)^2 + \left(\frac{R_p \cdot U_{SS}^{\text{Kanal I}}}{(U_{SS}^{\text{Kanal II}})^2} \cdot u_{U_{SS}^{\text{Kanal II}}}\right)^2}$$

Beispielrechnung für 1. Messwert:

$$u_Z = \sqrt{408 + 5858 + 16777}\Omega$$

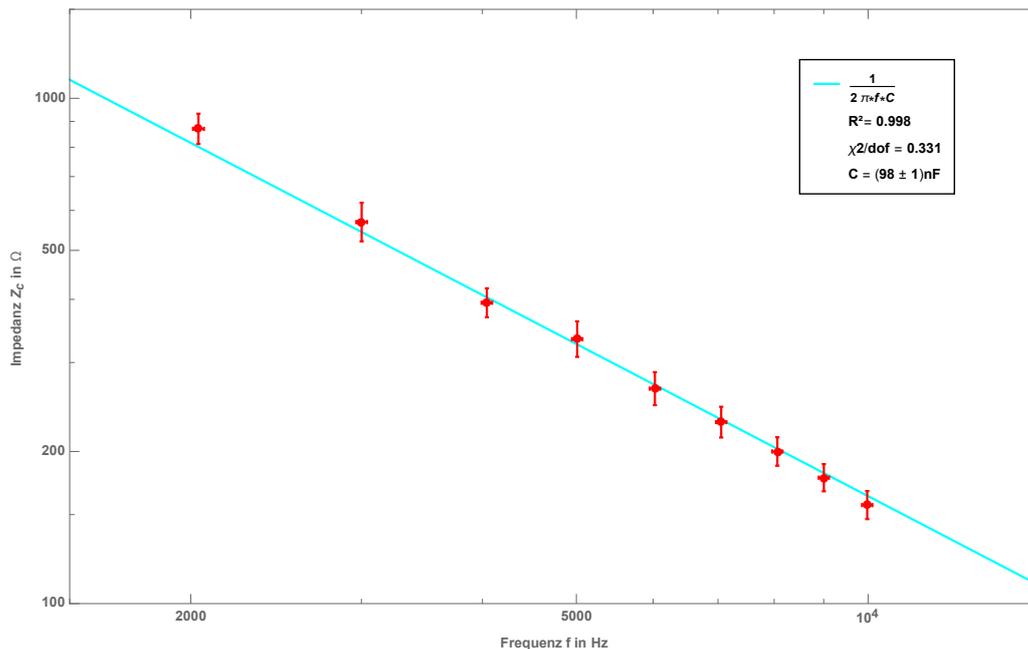
$$u_Z = 160\Omega$$

Es ist aus dieser Beispielrechnung zu erkennen, dass die Unsicherheit der Spannung des zweiten Kanals den größten Einfluss auf den Gesamtfehler hat, während der des Widerstands fast vernachlässigbar ist.

Es wurden alle Werte berechnet und ihre Unsicherheiten bestimmt. Durch diese Werte wird die charakteristische Funktion des Betrags des Kondensatorwiderstand in Abhängigkeit von der Frequenz grafisch dargestellt. Über die Werte und ihre Unsicherheiten wurde eine gewichtete Regression ausgeführt nach dem Zusammenhang für die Impedanz des Kondensators:

$$|Z_C(f)| = \frac{1}{2\pi \cdot f \cdot C}$$

Kondensator - Impedanz in Abhängigkeit der Frequenz



Darstellung der Residuen

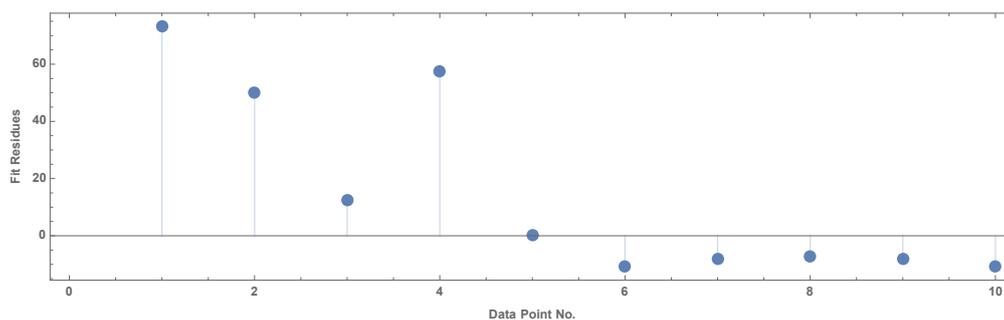


Abb. 2: Darstellung der Messwerte von Z_C in Frequenzabhängigkeit und ihrer Unsicherheiten, Regression von $|Z_C(f)| = \frac{1}{2\pi \cdot f \cdot C}$ über die Werte und die Darstellung der Abweichungen vom Fit (Residuen)

Der Graph der Fitfunktion durchläuft die Fehlerbalken aller Werte bis auf einen und die Fit Funktion verläuft als Gerade nachdem die Skalierung an $1/f$ angepasst wurde. Der R^2 Test ist nahe 1. Wir haben in der Fehlerberechnung gesehen, dass die Unsicherheit

hauptsächlich von der der Spannung 2 beeinflusst wurde. Wahrscheinlich war die Spannungsmessung am Oszilloskop genauer, als wir sie abgeschätzt haben. Da alle Test die Güte der Regression bestätigen und ein klarer Zusammenhang erkennbar ist, können wir davon ausgehen, dass die verwendete Formel dem entspricht, was wir beim Experiment gemessen haben. Bei der Betrachtung der Residuen fällt auf, dass die ersten Werte stärker vom Fit abweichen, das lässt sich möglicherweise dadurch begründen, dass die Spannung in diesem Bereich sehr klein war und damit die Unsicherheit des Oszilloskop höher. Da aber auch diese Abweichung nicht signifikant ist, und im Bereich der Unsicherheiten, gibt es keinen Grund unsere Annahme anzuzweifeln. Das Ergebnis dieser Messreihe bestätigt den erwarteten Zusammenhang zwischen $|Z_C|$ und f .

Aus dem Regressionsparameter folgt direkt die Kapazität des Kondensators:

$$C = (98 \pm 1)\text{nF}$$

Dieses Ergebnis liegt im Unsicherheitsbereich des Vergleichswertes, den wir am Anfang des Versuchs gemessen haben.

3.2 Spule als linearer Zweipol

In der zweiten Versuchsreihe wird der Zweipol durch die Spule ersetzt und die Spannungen wie in der ersten Messreihe bestimmt. Des weiteren wird die zeitliche Differenz zwischen den Spannungen gemessen und daraus die Phasenverschiebung berechnet.

Spule als linearer Zweipol

Frquenz in Hz	Channel I			Channel II		
	Div	V/Div	U in V	Div	V/Div	U in V
10.81 ± 0.01	1.7	5	8.5 ± 0.5	2.5	0.2	0.50 ± 0.02
20.07 ± 0.01	1.7	5	8.5 ± 0.5	2.5	0.2	0.50 ± 0.02
30.52 ± 0.01	1.8	5	9.0 ± 0.5	2.4	0.2	0.48 ± 0.02
40.36 ± 0.01	1.8	5	9.0 ± 0.5	2.2	0.2	0.44 ± 0.02
50.06 ± 0.01	1.8	5	9.0 ± 0.5	2.0	0.2	0.40 ± 0.02
60.84 ± 0.01	1.9	5	9.5 ± 0.5	1.9	0.2	0.38 ± 0.02
70.73 ± 0.01	2.0	5	10.0 ± 0.5	1.7	0.2	0.34 ± 0.02
80.88 ± 0.01	2.0	5	10.0 ± 0.5	1.6	0.2	0.32 ± 0.02
90.1 ± 0.01	2.0	5	10.0 ± 0.5	1.5	0.2	0.30 ± 0.02
100.3 ± 0.1	2.0	5	10.0 ± 0.5	1.4	0.2	0.28 ± 0.02
200.3 ± 0.1	2.2	5	11.0 ± 0.5	1.6	0.1	0.16 ± 0.01
303.8 ± 0.1	2.2	5	11.0 ± 0.5	1.1	0.1	0.11 ± 0.01
404.6 ± 0.1	2.2	5	11.0 ± 0.5	1.6	0.05	0.080 ± 0.005
501.6 ± 0.1	2.3	5	11.5 ± 0.5	1.3	0.05	0.065 ± 0.005

Alle Unsicherheiten wurden bestimmt wie bei der vorherigen Messreihe des Kondensators. Ebenso wurde der Betrag des komplexen Widerstand bestimmt:

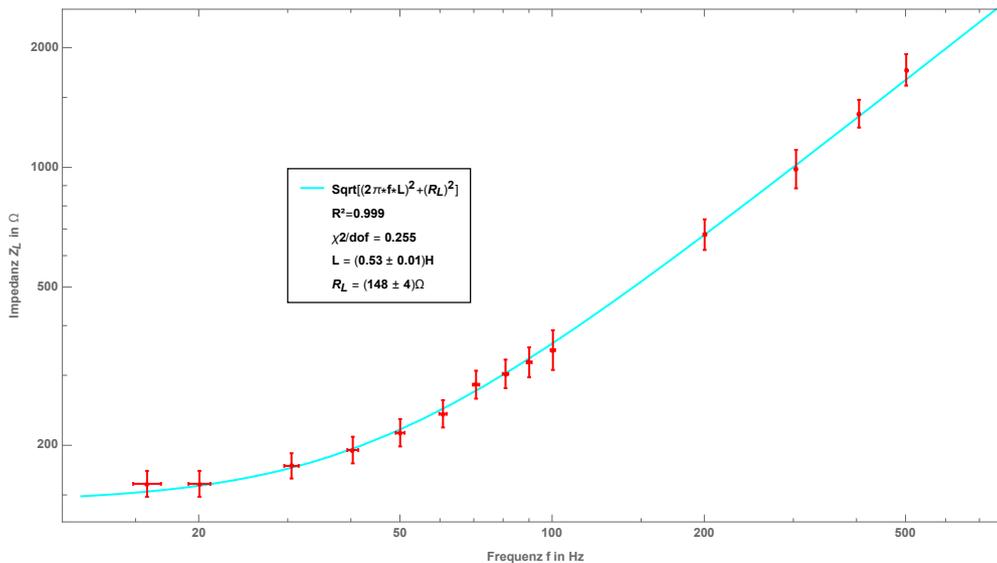
Komplexer Widerstand der Spule

f in Hz	u_f in Hz	$ Z $ in Ω	u_Z in Ω
10.81	1	160	12
20.07	1	160	12
30.52	1	177	13
40.36	1	195	15
50.06	1	215	17
60.84	1	240	19
70.73	1	284	23
80.88	1	302	25
90.1	1	323	28
100.3	1	350	40
200.3	1	680	60
303.8	1	990	110
404.6	1	1370	110
501.6	1	1760	160

Alle Werte und deren Unsicherheiten wurden bestimmt und werden wie in der ersten Messreihe verwendet um sie über die zu erwartende Widerstandsfunktion der Spule zu regressieren.

$$|Z_L| = \sqrt{R_L^2 + (2\pi \cdot f \cdot L)^2}$$

Spule - Impedanz in Abhängigkeit der Frequenz



Darstellung der Residuen

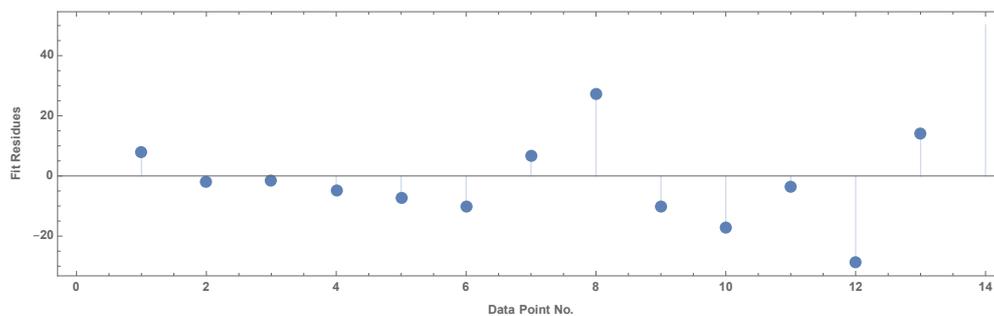


Abb. 3: Darstellung der Messwerte von Z_L in Frequenzabhängigkeit und ihrer Unsicherheiten, Regression von $|Z_L| = \sqrt{R_L^2 + (2\pi \cdot f \cdot L)^2}$ über die Werte und die Darstellung der Abweichungen vom Fit (Residuen)

Der Graph der Fitfunktion läuft durch alle Unsicherheiten der Messwerte. Der R^2 Test ergibt einen Wert der erst in der 4. Stelle von 1 abweicht. Die Funktion der Regression der gemessenen Daten stimmt mit dem erwarteten Zusammenhang überein. Es fällt auf, dass der Graph nur im Bereich hoher Frequenzen eine Gerade ist. Das ist der Bereich, in dem die Impedanz hauptsächlich von dem Wechselstromwiderstand der Spule abhängt. In dem also:

$$|Z_L| \approx 2\pi \cdot f \cdot L$$

In der Vorbetrachtung wurde bereits gezeigt, dass die Spule auch noch einen ohmschen Widerstand besitzt, der von dem Widerstand der Spulenwicklungen kommt. Im Bereich kleiner Frequenzen ist der Frequenzabhängige Widerstand der idealen Spule klein und daher wird der Einfluss des ohmschen Widerstand signifikant. Strebt die Frequenz gegen 0, so strebt die Impedanz gegen den rein Ohmschen Widerstand der Spule. Somit bestimmen wir aus den Regressionsparametern also den ohmschen Widerstand der Spule und

außerdem ihre Induktivität:

$$L = (0.53 \pm 0.01)\text{H}$$

$$R_L = (148 \pm 4)\Omega$$

Der Wert für den ohmschen Widerstand der Spule liegt im Unsicherheitsbereich des gemessenen Vergleichswert.

3.3 Phasenverschiebung der Spulenspannung

Während der Messungen für die Spannung der Spule, wurde außerdem die zeitliche Differenz der Nullstellen gleicher Phase bestimmt. Mit Hilfe der Zeitlichen Differenz kann die Phasenverschiebung bestimmt werden:

$$\varphi = 2\pi \cdot \frac{\Delta t \cdot f}{1\text{s}}$$

Damit wurde zu jeder Frequenz die Phasenverschiebung ermittelt, und die Unsicherheit durch gaußsche Fehlerfortpflanzung berechnet. Der Fehler der Zeit wurde abgeschätzt, durch eine halbe kleinste Skaleneinteilung beim Ablesen von Div.

Spule als linearer Zweipol - Phasenverschiebung

Frquenz in Hz	Phasenverschiebung					
	Div	ms/Div	Δt in ms	u_t in ms	φ in rad	u_φ in rad
10.81 ± 0.01	0.2	10.0	2.0	1.0	0.136	0.011
20.07 ± 0.01	0.3	10.0	3.0	1.0	0.378	0.020
30.52 ± 0.01	0.5	5.0	2.5	0.5	0.479	0.015
40.36 ± 0.01	0.6	5.0	3.0	0.5	0.761	0.020
50.06 ± 0.01	0.6	5.0	3.0	0.5	0.944	0.025
60.84 ± 0.01	0.5	5.0	2.5	0.5	0.956	0.03
70.73 ± 0.01	1.1	2.0	2.2	0.2	0.978	0.014
80.88 ± 0.01	1.1	2.0	2.2	0.2	1.118	0.016
90.1 ± 0.01	1.0	2.0	2.0	0.2	1.132	0.018
100.3 ± 0.1	0.9	2.0	1.8	0.2	1.134	0.020
200.3 ± 0.1	1.1	1.0	1.1	0.1	1.384	0.020
303.8 ± 0.1	1.4	0.5	0.70	0.05	1.336	0.015
404.6 ± 0.1	1.2	0.5	0.60	0.05	1.525	0.020
501.6 ± 0.1	0.9	0.5	0.45	0.05	1.418	0.026

Geht man davon aus, dass sich die Impedanz aus dem ohmschen Widerstand der Spule und dem Komplexen Widerstand der Induktivität zusammensetzt, dann gilt für die Phasen-

verschiebung:

$$\tan(\varphi) = \frac{2\pi \cdot f \cdot L}{R_L}$$

$$\varphi(f) = \arctan\left(\frac{2\pi \cdot f \cdot L}{R_L}\right)$$

Die Formel wird als Annahme verwendet um eine Regression der Messwerte zu erstellen:

Spule - Phasenverschiebung in Abhängigkeit der Frequenz

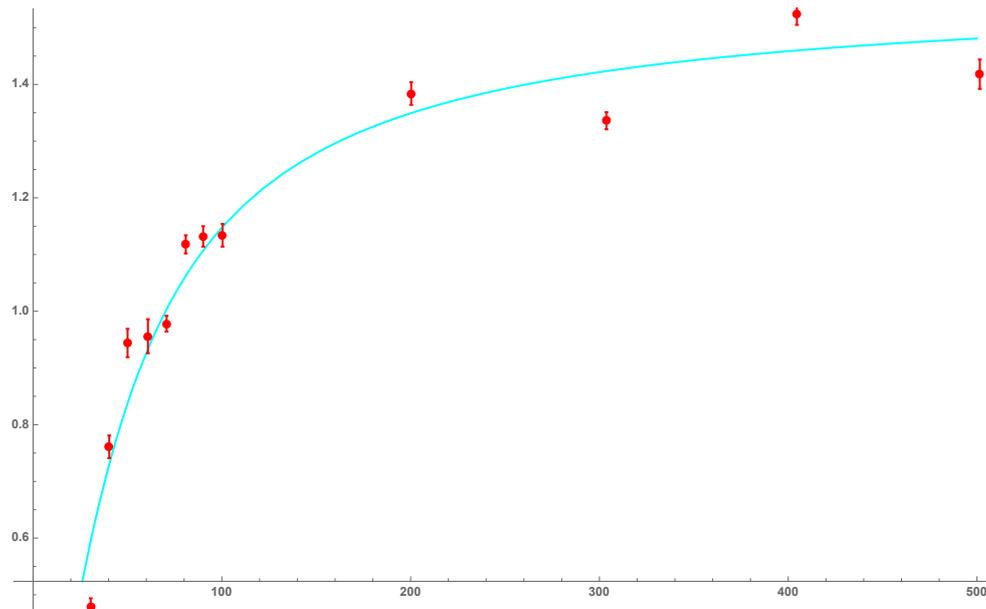


Abb. 4: Darstellung der Messwerte von φ in Frequenzabhängigkeit und ihrer Unsicherheiten, Regression von $\varphi(f) = \arctan\left(\frac{2\pi \cdot f \cdot L}{R_L}\right)$ über die Werte.

Die Rezeptionskurse durchläuft nur einen Teil der Messwerte, ein großer Teil liegt außerhalb. Die Werte haben scheinbar zu klein abgeschätzte Unsicherheiten. Die Regressionsskurve hat eine schlechte Güte. Es scheint ein Zusammenhang entsprechend der Formel zu bestehen, aber aufgrund der unzureichenden Regression, kann dieser Zusammenhang nicht bestätigt werden. Um eine verlässliche Aussage treffen zu können, muss diese Messreihe wiederholt werden. Der Versuch hat allerdings zumindest gezeigt, dass beim Versuch mit der Spule die Phasenverschiebung nicht konstant ist, sondern bei höherer Frequenz größer wird. Während beim Kondensator der Strom der Spannung konstant um $\pi/2$ vorausgeeilt ist, ist die Phasenverschiebung bei der Spule Frequenzabhängig. Bei niedrigen Frequenzen ist sie nahe Null und geht dann scheinbar asymptotisch gegen $\pi/2$, so dass die Spannung dem Strom voraus eilt.

3.4 Bestimmung der Resonanzfrequenz

Im folgenden Teil des Experimentes sollen die Eigenschaften des Schwingkreises untersucht werden. Dazu wird ein Kondensator und eine Spule in Reihe geschaltet und es entsteht ein Reihenschwingkreis als Zweipol. Eine charakteristische Eigenschaft eines Schwingkreises ist seine Resonanzfrequenz. Da wir die gleichen Bauteile verwenden, können wir die bestimmten Größen für Kapazität und Induktivität verwenden um eine Erwartungsfrequenz zu bestimmen. Die Resonanzfrequenz eines idealen Reihenschwingkreises ist erreicht, wenn:

$$\frac{1}{i\omega C} + i\omega L = 0$$

Nach Umformen folgt damit für die Frequenz:

$$f = \frac{1}{2\pi \cdot \sqrt{LC}}$$
$$f = \frac{1}{2\pi \sqrt{98\text{nF} \cdot 0.53\text{H}}}$$
$$f = (698 \pm 8)\text{Hz}$$

Es wurden die Werte aus der Regression für Induktivität und Kapazität verwendet. Die Unsicherheit wurde durch gaußsche Fehlerfortpflanzung der gegebenen Unsicherheiten bestimmt:

$$u_f = \sqrt{\left(\frac{1}{4\pi\sqrt{LC^3}} \cdot u_C\right)^2 + \left(\frac{1}{4\pi\sqrt{L^3C}} \cdot u_L\right)^2}$$
$$u_f = 8\text{Hz}$$

Diese Frequenz wird als Vergleichswert verwendet. Nun suchen wir im Experiment die Resonanz, um diese zu finden stellen wir die Frequenz so ein, dass die Spannung über dem gesamten System keine Phasenverschiebung zur Spannung über dem ohmschen Widerstand hat. Die Spannung über dem Widerstand ist phasengleich mit dem Strom und damit ist in dem eingestellten Fall die Phasenverschiebung im Schwingkreis auch null. Es gleichen sich also die frequenzabhängigen Widerstände von Kondensator und Spule genau aus und wir haben den Resonanzfall erreicht. Schalten wir das Oszilloskop um, so wird die X-Y-Darstellung der Spannung als Lissajous-Figur angezeigt. Mit Hilfe der Lissajous-Figur

wird die Resonanzfrequenz wiederholt eingestellt und der Wert aufgenommen:

$$\begin{aligned}f_1 &= 734.3\text{Hz} \\f_2 &= 733.4\text{Hz} \\f_3 &= 734.9\text{Hz} \\f_4 &= 734.7\text{Hz} \\f_5 &= 733.1\text{Hz} \\f_6 &= 735.2\text{Hz} \\ \bar{f} &= (734.3 \pm 0.4)\text{Hz}\end{aligned}$$

Dabei ist \bar{f} das arithmetische Mittel der Werte und als Unsicherheit wird die statistische Unsicherheit bestimmt durch:

$$\begin{aligned}u_f &= \frac{s}{\sqrt{n}} \\u_f &= \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (f_i - \bar{f})^2}{n(n-1)}} \\u_f &\approx 0.38\text{Hz} = 0.4\text{Hz}\end{aligned}$$

Dadurch haben wir nun die Resonanzfrequenz mit Unsicherheit bestimmt. Diese stimmt allerdings nicht mit dem berechneten Vergleichswert überein. Der betrachtete Schwingkreis nicht ideal ist, sondern besitzt einen ohmschen Widerstand. Für nicht ideale, ohmsch gedämpfte Schwingkreise lautet der Korrekturterm:

$$\omega_{real} = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{R^2}{4L^2}}$$

Dieser korrigiert also die Resonanzfrequenz nach unten. Die Resonanzfrequenz wurde direkt am Schwingkreis gemessen und die Messgeräte hatten verhältnismäßig geringe Ungenauigkeiten. Es ist davon auszugehen, dass das experimentelle Ergebnis für diesen, realen Schwingkreis konsistenter ist, als der berechnete Wert. Der gegebene Schwingkreis hatte möglicherweise noch Induktivitäten oder Kapazitäten die nicht beabsichtigt waren oder wurde von anderen Feldern beeinflusst.

Bei der bestimmten Resonanzfrequenz wird mit einem digitalen Multimeter die Spannungen gemessen, die über den einzelnen Bauelementen abfallen um zu prüfen ob die Spannungsbilanz stimmt. Alle Werte wurden als effektiv Werte gemessen und ihre Un-

sicherheiten entsprechen den vom Hersteller angegebenen Unsicherheiten:

$$U_0 = (6.36 \pm 0.24)\text{V}$$

$$U_P = (0.224 \pm 0.021)\text{V}$$

$$U_{LC} = (6.12 \pm 0.24)\text{V}$$

$$U_C = (52.4 \pm 2.2)\text{V}$$

$$U_L = (52.8 \pm 2.2)\text{V}$$

Die Spannung U_0 die der Generator liefert, müssten komplett über dem Widerstand und dem Schwingkreis abfallen:

$$U_0 = U_P + U_{LC}$$

$$(6.36 \pm 0.24)\text{V} = (6.12 \pm 0.24)\text{V} + (0.224 \pm 0.021)\text{V}$$

$$(6.36 \pm 0.24)\text{V} = (6.34 \pm 0.25)\text{V}$$

Die Ergebnisse stimmen bis auf die zweite Nachkommastelle überein und können somit unter Berücksichtigung der Unsicherheiten als gleich betrachtet werden. Es soll des weiteren überprüft werden, ob der Betrag des Spannungsabfalls über Spule und Kondensator gleich ist, wie man es bei einem Schwingkreis im Resonanzfall erwarten würde.

$$U_C = U_L$$

$$(52.4 \pm 2.2)\text{V} \approx (52.8 \pm 2.2)\text{V}$$

Die beiden Werte sind innerhalb ihrer Unsicherheiten übereinstimmend. Die Abweichung könnte dadurch begründet sein, dass die Spule einen Weicheisenkern besitzt. In diesem werden Wirbelströme induziert und die dafür aufgewendete Energie macht sich als ein etwas höherer Spannungsabfall bemerkbar.

Es soll nun der Strom bestimmt werden, der im Resonanzfall fließt. Dazu verwenden wir die Spannung über dem Präzisionswiderstand und sein uns bekannter Widerstand:

$$U_P = R_P \cdot I_{res}$$

$$I_{res} = \frac{U_P}{R_P}$$

$$I_{res} = \frac{0.224\text{V}}{9.95\Omega}$$

$$I_{res} = (22.5 \pm 2.2)\text{mA}$$

Es wird der reelle Widerstand des Reihenschwingkreis bestimmt, von dem wir erwarten, dass er dem ohmschen Widerstand der Spule entspricht:

$$R_{LC} = \frac{U_{LC}}{I_{res}}$$

$$R_{LC} = (272 \pm 29)\Omega$$

Das Ergebnis ist deutlich größer als der ohmsche Widerstand der Spule mit $R_L = (148 \pm 4)\Omega$. Alle Unsicherheiten wurden abgeschätzt und daher muss ein anderer Effekt den Widerstand des Schwingkreises beeinflussen. Wir haben bereits zuvor festgestellt, dass im Eisenkern der Spule Wirbelströme induziert werden. Dies ist der Grund warum der Widerstand der Spule größer ist, als der rein durch den Draht der Spulenwicklungen bedingt Widerstand.

Nun wird über die Spannung des Kondensators die Spannungsüberhöhung des Schwingkreises bestimmt. Hier ist U_{aus} die Ausgangsspannung über dem Schwingkreis, die hier der Differenz aus Generatorspannung und U_P entspricht:

$$\rho = \left| \frac{U_C}{U_{aus}} \right| = \left| \frac{U_C}{U_0 - U_P} \right|$$

$$\rho = 8.2 \pm 0.5$$

So kann aus der Spannungsüberhöhung auch der Spulenwiderstand bestimmt werden, denn es gilt:

$$\rho = \frac{1}{\omega_{res} \cdot C \cdot R_L}$$

$$R_L = \frac{1}{\omega_{res} \cdot C \cdot \rho}$$

$$R_L = (269 \pm 17)\Omega$$

Für die Frequenz wurde der experimentelle Wert verwendet und die Kapazität wurde der Regression entnommen. Dieser Wert bestätigt das Ergebnis von der Rechnung zuvor, in der der Widerstand des Schwingkreises bestimmt wurde. Beide Werte stimmen in ihren Unsicherheitsbereichen überein. Es folgt daraus, dass die Spule einen höheren Widerstand hat als ihren Ohmschen, da sie wie schon begründet einen Eisenkern besitzt.

3.5 Reihenschwingkreis als linearer Zweipol

In der letzten Versuchsreihe wird der Reihenschwingkreis als linearer Zweipol betrachtet und es soll die Impedanz in Abhängigkeit von der Frequenz untersucht werden. Es wurde bereits der Resonanzfall untersucht und es ist daher zu erwarten, dass dort die Impedanz minimal ist. In diesem Bereich werden daher mehr Messwerte aufgenommen. Wie zuvor werden die Spannungen der beiden Kanäle des Oszilloskops gemessen und daraus die

Impedanz bestimmt, es ergeben sich folgende Werte:

Schwingkreis als linearer Zweipol

Frquenz in Hz	Channel I			Channel II		
	Div	V/Div	U in V	Div	V/Div	U in V
200.4 ± 0.1	2.2	5	11.0 ± 0.5	1.5	0.01	0.015 ± 0.001
300.8 ± 0.1	2.2	5	11.0 ± 0.5	1.2	0.02	0.024 ± 0.002
400.2 ± 0.1	2.2	5	11.0 ± 0.5	1.9	0.02	0.038 ± 0.002
504.0 ± 0.1	2.2	5	11.0 ± 0.5	3.2	0.02	0.064 ± 0.002
600.6 ± 0.1	2.2	5	11.0 ± 0.5	2.2	0.05	0.11 ± 0.005
650.3 ± 0.1	2.1	5	10.5 ± 0.5	1.7	0.1	0.17 ± 0.01
674.0 ± 0.1	2.1	5	10.5 ± 0.5	2.2	0.1	0.22 ± 0.01
690.9 ± 0.1	2.0	5	10.0 ± 0.5	2.6	0.1	0.26 ± 0.01
700.5 ± 0.1	2.0	5	10.0 ± 0.5	2.8	0.1	0.28 ± 0.01
710.0 ± 0.1	2.0	5	10.0 ± 0.5	3.1	0.1	0.31 ± 0.01
720.2 ± 0.1	1.9	5	9.5 ± 0.5	1.6	0.2	0.32 ± 0.02
725.2 ± 0.1	1.9	5	9.5 ± 0.5	3.3	0.1	0.33 ± 0.01
730.3 ± 0.1	1.9	5	9.5 ± 0.5	3.4	0.1	0.34 ± 0.01
733.1 ± 0.1	1.9	5	9.5 ± 0.5	1.7	0.2	0.34 ± 0.02
736.3 ± 0.1	1.9	5	9.5 ± 0.5	3.4	0.1	0.34 ± 0.01
740.8 ± 0.1	1.9	5	9.5 ± 0.5	1.6	0.2	0.32 ± 0.02
745.7 ± 0.1	1.9	5	9.5 ± 0.5	3.3	0.1	0.33 ± 0.01
750.7 ± 0.1	1.9	5	9.5 ± 0.5	3.2	0.1	0.32 ± 0.01
761.5 ± 0.1	2.0	5	10.0 ± 0.5	1.5	0.2	0.3 ± 0.02
774.9 ± 0.1	2.0	5	10.0 ± 0.5	2.7	0.1	0.27 ± 0.01
804.4 ± 0.1	2.1	5	10.5 ± 0.5	1.1	0.2	0.22 ± 0.02
850.2 ± 0.1	2.1	5	10.5 ± 0.5	1.5	0.1	0.15 ± 0.01
904.9 ± 0.1	2.2	5	11.0 ± 0.5	1.1	0.1	0.11 ± 0.01
1000 ± 1	2.2	5	11.0 ± 0.5	0.8	0.1	0.08 ± 0.01
1100 ± 1	2.2	5	11.0 ± 0.5	3.0	0.02	0.06 ± 0.002
1200 ± 1	2.2	5	11.0 ± 0.5	2.5	0.02	0.05 ± 0.002

Komplexer Widerstand des Schwingkreis

f in Hz	u_f in Hz	$ Z $ in Ω	u_Z in Ω
200.4	0.1	7300	600
300.8	0.1	4600	500
400.2	0.1	2890	210
504.0	0.1	1710	100
600.6	0.1	990	70
650.3	0.1	610	50
674.0	0.1	470	40
690.9	0.1	375	25
700.5	0.1	347	22
710.0	0.1	313	19
720.2	0.1	287	24
725.2	0.1	278	18
730.3	0.1	269	17
733.1	0.1	269	22
736.3	0.1	269	17
740.8	0.1	287	24
745.7	0.1	278	18
750.7	0.1	287	18
761.5	0.1	323	28
774.9	0.1	360	23
804.4	0.1	470	50
850.2	0.1	690	60
904.9	0.1	990	110
1000	1	1370	190
1100	1	1820	110
1200	1	2190	140

Die Impedanz des Reihenschwingkreis ist abhängig vom Ohmschen Widerstand der Spule sowie den komplexen Widerständen von Kondensator und Spule und ergibt sich somit zu:

$$|Z| = \sqrt{R_L^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

$$|Z| = \sqrt{R_L^2 + \left(2\pi f L - \frac{1}{2\pi f C}\right)^2}$$

Dieser Zusammenhang zwischen Frequenz und Impedanz wird als Funktion verwendet für die Regression über die Messwerte.

Reihenschwingkreis - Impedanz in Abhängigkeit der Frequenz

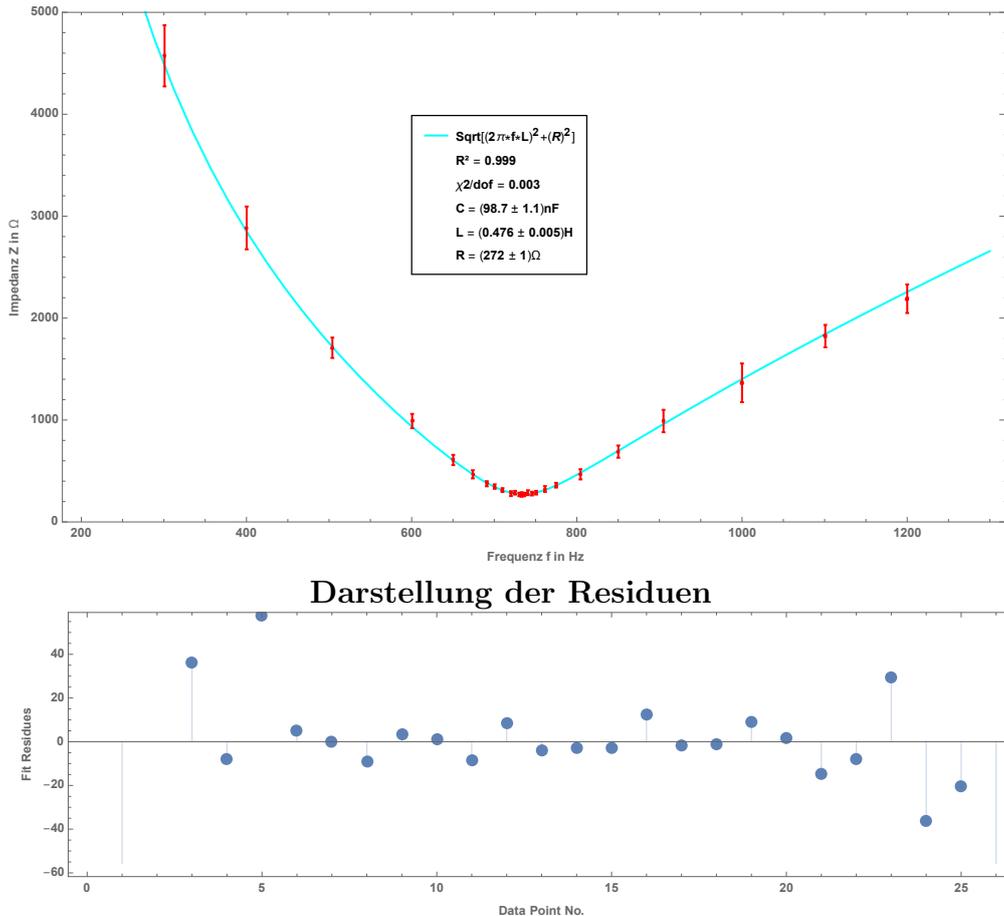


Abb. 5: Darstellung der Messwerte von Z_{LC} in Frequenzabhängigkeit und ihrer Unsicherheiten, Regression von $|Z| = \sqrt{R_L^2 + \left(2\pi f L - \frac{1}{2\pi f C}\right)^2}$ über die Werte und die Darstellung der Abweichungen vom Fit (Residuen)

Der Graph der Fitfunktion durchläuft alle Messpunkte in ihren Unsicherheitsbereichen. Der R^2 Test hat mit 0.999 einen Wert nahe eins. Die Residuen sind für fast alle Werte verhältnismäßig klein. Nur wenige Werte weichen vom Fit ab, dies sind vor allem die Werte, die bei sehr niedrigen und hohen Frequenzen aufgenommen wurden. Gerade im Bereich niedriger Frequenzen war die Messung aufgrund der Auflösung des Oszilloskop ungenauer. Die Regression bestätigt eindeutig den erwarteten Zusammenhang und trifft alle aufgenommenen Werte. Die Funktion hat wie erwartet einen Tiefpunkt bei der Resonanzfrequenz, wo die Impedanz am geringsten ist, denn die Induktivität und Kapazität gleichen sich aus. Von diesem Tiefpunkt divergiert die Funktion in beide Richtungen. Geht die Frequenz gegen 0, so wird der komplexe Widerstand des Kondensators signifikant und geht mit $\frac{1}{\omega \cdot C}$ gegen Unendlich. Für große Frequenzen geht der Widerstand der Spule hauptsächlich ein und lässt die Impedanz nahezu linear gegen Unendlich streben. Am Resonanzpunkt entspricht die Impedanz dem reellen Widerstand der Spule. Aus der Funk-

tion folgen außerdem die Kapazität und die Induktivität:

$$R_L = (272 \pm 1.0) \Omega$$

$$C = (98.7 \pm 1.1) \text{ nF}$$

$$L = (476 \pm 5) \text{ mH}$$

Die Kapazität und der Spulen Widerstand stimmen mit den Ergebnissen aus vorherigen Messungen überein. Es zeigt sich, dass die Induktivität geringer ist, als aus der Regression der Spulen-Impedanz hervorging. Um dieses Ergebnis zu untersuchen, wird aus den Werten für die Induktivität erneut die Resonanzfrequenz bestimmt:

$$f = \frac{1}{2\pi \cdot \sqrt{LC}}$$

$$f = \frac{1}{2\pi \cdot \sqrt{98.7 \text{ nF} \cdot 0.476 \text{ Hz}}}$$

$$f = (734 \pm 6) \text{ Hz}$$

Dieses Ergebnis stimmt mit dem Ergebnis überein, welches wir aus der Messung der Resonanzfrequenz erhalten haben und mit der Lage des Minimums bei der Reihenschwingkreismessung. Unter der Annahme, dass die Frequenzmessung konsistent ist, spricht dieses Ergebnis dafür, dass diese bestimmte Induktivität näher am realen Wert liegt, als der Wert aus der zweiten Messreihe. Die Werte der Reihenschwingermessreihe bestätigen die eingangs aufgestellte Funktion für die Frequenzabhängigkeit der Impedanz und unterstützt außerdem die gemessenen Werte für die Kapazität und Resonanzfrequenz. Während des Versuchs wurde repräsentativ die Phasenverschiebung beobachtet. Ohne eine quantitative Auswertung vorzunehmen, ist aufgefallen, dass im Resonanzfall keine Phasenverschiebung erkennbar ist. Das unterstützt die These, dass im Resonanzfall die Induktivität und Kapazität sich ausgleichen und somit nur ein ohmscher Widerstand bleibt, dieser ruft keine Phasenverschiebung hervor. Wird die Frequenz niedriger so wirkt hauptsächlich die Kapazität und die Phasenverschiebung nähert sich $-\pi/2$ an. Während für höhere Frequenzen der Einfluss der Spule überwiegt und die Phasenverschiebung nach $+\pi/2$ strebt.

4 Auswertung und Fehlerbetrachtung

Es wurden drei lineare Zweipole auf ihre Eigenschaften im Wechselstromkreis untersucht, hauptsächlich auf die Frequenzabhängigkeit ihrer Impedanz. Bestimmt wurden außerdem die Kapazität des Kondensators, Induktivität und Widerstand der Spule und die Resonanzfrequenz des Reihenschwingkreises:

Multimeter Messung Messung	Kondensator als Zweipol	Spule als Zweipol	Schwingkreis als Zweipol
$C = (95 \pm 1)\text{nF}$	$C = (98 \pm 1.0)\text{nF}$		$C = (98.7 \pm 1.1)\text{nF}$
$R_L = (150.0 \pm 1.6)\Omega$		$L = (530 \pm 10)\text{mH}$ $R_L = (148 \pm 4)\Omega$	$L = (476 \pm 5)\text{mH}$ $R_L = (272 \pm 1.0)\Omega$ $f_{rech} = (698 \pm 8)\text{Hz}$ $f_{exp} = (734.3 \pm 0.4)\text{Hz}$

Die Werte des Kondensators stimmen unter Berücksichtigung der Unsicherheiten in allen Versuchen überein. Die Messung des Multimeters weicht nach unten ab. Möglicherweise sind beim Aufbau der Messapertur Kapazitäten aufgetreten die nicht beabsichtigt waren und daher die anderen Messungen vergrößert haben. Da aber die Messung mit dem Multimeter eine Unsicherheit von 4nF hat, könnte dies auch ein systematischer Fehler des Multimeters sein. Die Induktivität wurde zum einen aus der Regression über die Impedanz der Spule und über den Schwingkreis bestimmt. Beide Werte unterscheiden sich über ihre Unsicherheiten hinaus. Wie bereits gezeigt, stimmt die Induktivität der zweiten Messung besser mit der Erwartung der Resonanzfrequenz überein. Daher ist davon aus zu gehen, dass die zweite Induktivität die ist, die für den Schwingkreis tatsächlich existiert. Ob dabei möglicherweise eine unbeabsichtigte Fremdinduktivität mit gemessen wurde, oder ob in der ersten Messung ein systematischer Messfehler aufgetreten ist, lässt sich nur durch eine Wiederholung des Versuchs bestimmen. Der reell Widerstand der Spule im Stromkreis ist bedeutend größer als der gemessene Ohmsche Widerstand. Wie bereits diskutiert liegt dies daran, dass im Weicheisenkern Wirbelströme induziert werden, und diese zu einer Energiedissipation führen. Daher ist im Stromkreis der tatsächliche Widerstand höher. Es ist zu betrachten, ob die Spule sich durch den Stromfluss erwärmt und somit der Widerstand erhöht wird. Da aber der Strom:

$$I_{res} = (22.5 \pm 2.2)\text{mV}$$

beträgt, ist die zu erwartende Erwärmung nur minimal. Auch die verwendeten Drähte haben einen, im Verhältnis, zu vernachlässigenden Widerstand. Es wurde des weiteren die Resonanzfrequenz bestimmt. Zunächst wird sie berechnet und dann gemessen. Der Messwert unterscheidet sich aber vom berechneten Wert. Diese Differenz wurde bereits überprüft und drauf zurück geführt, dass die erste Messung der Impedanz nicht der realen Impedanz des Schwingkreises entsprechen kann. Verwendet man die zweite bestimmte Impedanz, so entspricht der berechnete Wert auch dem gemessenen. Fehlerquellen sind

zum einen die elektrischen Felder, die während des Versuches mit den Stromkreis interferieren und zum Beispiel in die Spule Spannung induzieren. Diese Felder werden von den Strom führenden Leitungen in der Wand und von anderen Experimenten aufgebaut. Um diese Fehler zu minimieren, könnte man den Versuchsaufbau elektrisch abschirmen. Diese Fehler sind allerdings vergleichsweise klein, und haben wahrscheinlich geringe Auswirkungen auf das Experiment, sollten aber bedacht werden, für genauere Messungen. Die Anfangs angenommenen Gesetze für Komplexe Widerstände haben alle den Experimentellen Ergebnissen genügt und daher hat das Experiment unsere Annahmen bestätigt. Auch die Brechungen von Frequenz und Phasenverschiebung entsprach den Messwerten. Die größte Unstimmigkeit findet sich bei der Induktivität der Spule. Denn die bestimmte Induktivität des Schwingkreises entsprach nicht dem Messwert für die Spule, obwohl keine anderen, beabsichtigten, Induktivitäten verwendet wurden. Dies sollte bei einer eventuellen Wiederholung des Experimentes genauer betrachtet werden.

5 Anhang und Literatur

Originale Messwerte

E4
Platz 3

$C = 0,4 \mu F$
 $R_x = 150 \Omega$
 $R_D = 2,95 \Omega$
 $C_H I = 20 \mu F$
 $C_H II = 20 \mu F$

R_x ist Spule
 $R_x = 150 \Omega$
 $C = 100 \mu F$

1. Expansionstabelle

F	CH I	CH II	Div	VDiv
10,38	2,2	5	1,3	50mV
20,37	2,2	5	2,5	50mV
30,02	2,2	5	1,9	0,1V
40,42	2,2	5	2,6	0,1
50,09	2,2	5	1,6	0,2
60,26	2,1	5	1,9	0,2
70,54	2,1	5	2,2	0,2

$\varphi = \frac{\pi}{2}$

f	CH I	VDiv	CH II	VDiv	stf	t/Div
10,81	1,7	5	2,5	0,2	0,2	10ms
20,07	1,7	5	2,5	0,2	0,3	10ms
30,52	1,8	5	2,4	0,2	0,5	10ms
40,36	1,8	5	2,2	0,2	0,6	5ms
50,06	1,8	5	2,0	0,2	0,6	5ms
60,24	1,9	5	1,9	0,2	0,5	5ms
70,23	2,0	5	1,7	0,2	1,1	2ms
80,83	2,0	5	1,6	0,2	1,1	2ms
90,10	2,0	5	1,5	0,2	1,0	2ms
100,3	2,0	5	1,4	0,2	0,9	2ms
200,3	2,2	5	1,6	0,1	1,1	1ms
30,3,8	2,2	5	1,1	0,1	1,4	0,5ms
40,4,6	2,2	5	1,6	50ms	1,2	0,5ms
50,4,6	2,3	5	1,3	50ms	0,9	0,5ms

8. Phasenverschiebung ≈ 0

$\text{bei } f = 7350 = 0,1$
 $\text{CH I: Div} = 1,2, \text{ VDiv} = 5$
 $\text{CH II: Div} = 1,7, \text{ VDiv} = 0,2$
 $\pm 0,1 \text{ Div}$

Resonanzfrequenz

$f_1 = 734,3$
 $f_2 = 733,4$
 $f_3 = 735,9$
 $f_4 = 734,7$
 $f_5 = 733,8$
 $f_6 = 735,2$

10 Spannung

$U_{\text{Generator}} = 6,36 \text{ V}$
 $U_{\text{Widerstand}} = 0,224 \text{ V}$
 $U_{\text{Schwingkreis}} = 6,12 \text{ V}$
 $U_{\text{Widerstand}} = 52,4 \text{ V}$
 $U_{\text{Spule}} = 52,8 \text{ V}$

Prozente auf Messwert

f	CH I	VDiv	CH II	VDiv	U
200,4	2,2	5	1,5	10mV	-
400,2	2,2	5	1,5	20mV	-
600,6	2,2	5	2,2	50mV	-
450,3	2,1	5	1,7	0,1	-
400,5	2,0	5	2,8	0,1	-
320,2	1,9	5	1,6	0,2	fest 0
233,1	1,9	5	1,7	0,2	0
140,8	1,9	5	1,6	0,2	fest 0
164,5	2	5	1,5	0,2	0
80,4	2,1	5	1,1	0,2	0
908,5	2,2	5	1,1	0,1	0
1000	2,2	5	0,8	0,1	0
1700	2,2	5	2,5	20mV	0
504	2,2	5	3,2	20mV	0
6740	2,1	5	2,2	0,1	0
6809	2,0	5	2,9	0,1	0
7108	2,0	5	3,1	0,1	0
7252	1,9	5	3,3	0,1	0
730,3	1,9	5	3,4	0,1	0
736,3	1,9	5	3,4	0,1	0
745	1,9	5	3,3	0,1	0
750,7	1,9	5	3,2	0,1	0
774,9	2,0	5	2,7	0,1	0
850,2	2,1	5	1,5	0,1	0
1100,8	2,2	5	3,0	20mV	0
200,8	2,2	5	1,2	20mV	0

Literatur und Quellen

Verwendete Quellen

- [1] Skript - Physikalisches Grundpraktikum - Elektrodynamik und Optik 2010
- Uwe Müller - letzter Zugriff: 13.11.2018

Verwendete Software

- [1] Mathematica
[2] Python