$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$ | $\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n+1}{k}$ | # Menge => Potenzmenge: $2^n$ | $\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$ | $\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ | $x \geq -1$ $(1+x)^n \geq 1+nx$

Assoziativ $(x+y)+z = x+(y+z)$ | surjektiv: Rechtstotal | distributiv: $a\cdot(b+c) = ab+ac$ | Äquivalenzrelation: | GWS: $\lim(a+b) = \lim a + \lim b$

kommutativ $x+y = y+x$ | injektiv: Linkseindeutig | Abelsche Gruppe -> kommutativ | reflexiv $x \sim x$ | $\lim(a\cdot b) = \lim a \cdot \lim b$

Existenz der 0 $x+e = x$ | Gruppe: Menge + Relation | Ordnungsrelation: reflexiv $x \leq x$ | Symmetrisch $x \sim y \Rightarrow y \sim x$ | $\lim\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{\lim a}{\lim b}$

Existenz $x^{-1}$ $x + x^{-1} = e$ | Körper: Menge + 2 Relation (mit Distributiv) | Antisym. $x \leq y \wedge y \leq x \Rightarrow x = y$ | Transitiv $x \sim y \wedge y \sim z \Rightarrow x \sim z$ | L'Hospital:

Transitiv: $x \leq y \wedge y \leq z \Rightarrow x \leq z$

total: $x \leq y \vee y \leq x \; \forall x, y$ | $\Rightarrow m-1 \leq x \leq m$ $\frac{1}{n} < \varepsilon$

Natürliche Zahlen: $\forall A \subset N: v \in A \wedge \sigma(A) \subset A \Rightarrow A = N$ | Archimedizität: $nx > y$ $x \in \mathbb{R} \Rightarrow n \leq x \leq n+1$ $n \in \mathbb{N}$ $\Rightarrow n \cdot x \geq y$ $x \geq \frac{1}{n}$ | $\lim_{x \to y} = \lim \frac{f'(x)}{g'(x)}$ und falls "$\frac{0}{0}$" oder "$\frac{\infty}{\infty}$" → differenzierbar

$\sigma$ injektiv: $N \to N$ $v \in N \setminus \sigma(N)$ $v \hat{=} 0$ $\sigma \hat{=} +1$

Tupel: $(a,b)$ $(a,b) = (c,d) \Leftrightarrow a = c \wedge b = d$ | Rationale Zahlen: $(a,b)+(c,d) := (a\cdot d + b\cdot c, b\cdot d)$ $(a,b)\cdot(c,d) := (a\cdot c, b\cdot d)$

Jede konvergente Folge ist beschränkt $|a_n - a| < \varepsilon$ $\forall \varepsilon > 0$, Limes ist eindeutig | falls $a_n \leq b_n \; \forall n \Rightarrow \lim(a_n) \leq \lim(b_n)$ | $\infty$

Beschränkte, monotone Folgen sind konvergent

Cauchy Folge: $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0} \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall m, n: |a_n - a_m| < \varepsilon \; \forall n, m > n_0$ | Cauchy $\Leftrightarrow$ konvergent | Nullfolgenkriterium: $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ konvergiert $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} f_n = 0$ gilt nicht umgekehrt

Minorantenkriterium: $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ divergiert und $a_k \geq c_k \; \forall k \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_n$ auch divergiert | Majorantenkriterium: sei $\sum_{n=1}^{m} a_k$, und $\exists \sum c_k$ mit $|a_k| \leq c_k \Rightarrow \sum a_k$ absolut konvergiert

absolute Konvergenz: $\sum_{n=0}^{\infty} |f_n|$ konvergiert | Cauchy Kriterium: $\forall \varepsilon > 0 \exists N_0 \in \mathbb{N}: \forall n > m \geq n_0: \left|\sum_{i=0}^{n} f_i - \sum_{i=0}^{m} f_i\right| = \left|\sum_{i=m+1}^{n} f_i\right| < \varepsilon$ | Leibnitz: ist $a_n$ monoton fallend, so konvergiert die alternierende: $\sum (-1)^n a_n$

Majoranten Kriterium: $f_n$ und $v_n$: $v_n \geq 0$ $\sum_{n=0}^{\infty} v_n$ konvergiert: falls $|f_n| \leq v_n$ für fast alle $n \Rightarrow \sum f_n$ konvergiert absolut | falls Partialsumme beschränkt => konvergent 2

Wurzelkriterium: $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ konvergiert absolut $\Leftrightarrow \sqrt[n]{|f_n|} \leq c < 1$ für fast alle $n$ (nicht falls $\lim \sqrt[n]{f_i} = 1$) | $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ ist konvergent für $\forall x \in \mathbb{R}$ | $\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} = \frac{a}{1-q}$

Quotientenkriterium: $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ absolut konvergent: $\left|\frac{f_{n+1}}{f_n}\right| \leq c < 1$ für fast alle | Exponential Reihe:

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ | Cauchy Produkt: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ beide konvergent: $c_n := \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$ ist konvergent mit $\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right)$

$\exp(x) = \sum_{n=0}^{N} \frac{x^n}{n!} + R_{N+1}(x)$ | $|R_{N+1}(x)| \leq 2 \frac{|x|^{N+1}}{(N+1)!}$ | $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$ | $e^{iz} = \cos(z) + i\sin(z)$ | $\sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$ $\cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$ ist ein 2 | falls Teilfolge auf A konvergiert => A ist Häufungspunkt

Häufungspunkt: in $\varepsilon$ umgebung um A mindestens unendlich viele Punkte | Jeder Grenzwert ist Häufungspunkt | a ist Grenzwert, wenn alle Teilfolge darauf konvergieren

sup -> kleinste Obere schranke | inf -> größte untere Schranke | $\limsup: \lim_{n\to\infty} (\sup\{a_k : k \geq n\})$ = oder höchster Häufungspunkt sonst $\infty$

Funktionen: $T_f := \{(x,y) \in D \times \mathbb{R} : y = f(x)\}$ $f \circ g := f(g(x))$ | $\liminf: \lim_{n\to\infty} (\inf\{a_k : k \geq n\})$: oder kleinster Häufungspunkt

f ist stetig falls: $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ | konst. Funktion ist stetig, Exp ist stetig | Rationale Funkt sind stetig | von positionen stetige Funktionen sind stetig

zwischenwertsatz: $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig $f(a) < 0 \wedge f(b) > 0 \Rightarrow \exists p: f(p) = 0$ | Potenzreihe: $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ | zB. Logarithmus: $\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$

Konvergenzradius: $r := \sup \{|x - x_0| \mid \sum a_n (x-x_0)^n \text{ konvergiert}\}$

Kompakta: Abgeschlossenes und beschränktes Intervall $[a,b]$ | $r = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{|a_n|}\right)}$ oder $r = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ | falls alle $a_n$ ab $a_{n_0} \neq 0$

Jede in $[a,b]$ stetige Funktion ist beschränkt und nimmt max/min an | Aus Gleichmäßig stetig => stetig | stetig auf Kompakta => gleichmäßig stetig

Gleichmäßige stetigkeit: $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x, x_0 \in D: |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

$\cos(a+b) = \cos a \cdot \cos b - \sin a \sin b$ | $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$ | konst. Funktionen sind stetig | Identität ist stetig

Quotienten, Summen, Produkte von stetigen Funktionen sind stetig | Stetigkeit: $|x - \xi| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(\xi)| < \varepsilon$ stetig an Stelle $(\xi)$

$[a;b]$ und $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig $\Rightarrow f[a,b]$ ist ein Intervall

$z = a + bi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = r \cdot e^{i\varphi}$

Metrik:

$d(x,y) \geq 0 \wedge d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

$d(x,y) = d(y,x)$

$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$

Ball um Punkt von Metrik

$B(p,r) := \{y \in X \mid d(p,y) < r\}$ | $a(N) \in B(b, \varepsilon)$

Konvergenz: $\forall \varepsilon > 0 \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall N \in \mathbb{N} \setminus N_n(\varepsilon)$

$(\ln x)' = \frac{1}{x}$

$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = -(\arccos)'$

$(\arctan)' = \frac{1}{1+x^2}$

$(\tan)' = \frac{1}{\cos^2}$

$\sin^2 + \cos^2 = 1$

$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \cos\beta \pm \cos\alpha \sin\beta$

$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cos\beta \mp \sin\alpha \sin\beta$

$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2} \cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2} \cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

(lokales) Maximum:

$f(x) \geq f(x_0)$ $\forall x_0$ mit $|x - x_0| < \varepsilon$

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

$\lim \frac{\sin}{x} = 1$

$\lim \frac{\ln x}{x-1} = 1$

## Differenzieren

differenzierbar falls: $f'(x) := \lim_{x_0 \to x} \frac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ | $(c)' = 0$

$(\exp(x))' = \lim \frac{\exp(x+h) - \exp(x)}{h} = \exp(x) \lim_{h\to 0} \frac{\exp h - 1}{h} = \exp(x)$

~~stetig~~ Polynome sind diff. | $\left(\frac{f}{g}\right)'_a = (f'(a)g(a) - f(a)g'(a)) / (g(a)^2)$ | $(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$ $x_0 = f^{-1}(y_0)$

aus differenzierbar -> stetig

Cauchy: 1. Mittelwertsatz $a < b$ $f: [a,b]$ diffbar/stetig, $c \in (a,b)$ $f'(c) = \frac{f(a) - f(b)}{a - b}$

2. Mittelwertsatz $a < b$ $f, g: [a,b]$ diffbar/stetig: $f'(c) / g'(c) = \delta := \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$ | $f'(x) > 0 \; \forall x \Rightarrow$ streng monoton $f'(x) \geq 0 \Rightarrow$ monoton

totales diff: $df = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$ | $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ Reihenfolge egal | Taylor: $Tf(x;a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n$ | $\sum_{n=1}^{\infty} a_j x^j = f$

$f' = \sum_{n=1}^{\infty} j a_j x^{j-1}$

$a, b \in \mathbb{R}$ $a < b$ $f_n(a,b) \to \mathbb{R}$ diffbar $\forall n$

Falls:

1. $\exists x_0 \in (a,b)$ $n \to f_n(x_0)$ konvergiert und
2. $n \to f_n' \in Abb((a,b), \mathbb{R})$ auf ein $g \in Abb((a,b), \mathbb{R})$

=> 1. $n \to f_n$ konvergiert gleichförmig auf ein $f_\infty \in Abb(a, b, \mathbb{R})$
2. $f_\infty$ ist diff.bar
3. $f'_\infty = g$

Riemann Integral | Oberes Riemannintegral $\overline{\int_a^b} f(x)dx := \inf\left\{\int_a^b g(x)\,dx \mid g \in (T[a,b])_{\geq f}\right\}$ | f ist int.bar falls f beschränkt und $\overline{\int_a^b} f dx = \underline{\int_a^b} f dx$

Unteres Riemannintegral $\underline{\int_a^b} f(x)dx := \sup\left\{\int_a^b g(x)\,dx \mid g \in (T[a,b])_{\leq f}\right\}$

Das Integral $\int_a^b : R[a,b] \to \mathbb{R}$ linear und monoton | für $f \in R[a,b]$ gilt $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx \leq \|f\|_\infty (b-a)$

$a < b < c$ $f \in R[a,c] \Leftrightarrow f|[a,b] \in R[a,b]$ und $f|[b,c] \in R[b,c]$ $\Rightarrow \int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f|[b,c](x)\,dx$ | Monotone Funktionen sind Riemann integrierbar

stetige Funktionen sind Riemann integrierbar | <u>Hauptsatz</u>: $f \in R[a,b], y \in [a,b]$ | $F: [a;b] \to \mathbb{R}$ $F(x) = \int_y^x f(t)dt$ 2) F stetig auf (a,b) ist f stetig in $x_0$

Partielle Integration: $\int_a^b f'(x)g(x)dx = f(x)g(x)\Big|_{x=a}^{b} - \int_a^b f(x)g'(x)\,dx$ | $\Rightarrow \int_y^x f(t)dt = F(x) - F(y)$ => F diffbar => $F' = f$

Supstitution: $\int_{\phi(c)}^{\phi(d)} f(s)ds = \int_c^d f(\phi(t)) \cdot \phi'(t)\,dt$ | Kurvenintegral: $\int f := \int_a^b f(c(t)) \cdot \|c'(t)\| dt$ | Länge: $l(c) := \int_c 1\,dx$ | $\int \frac{1}{1+x^2} = \arctan x$

$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)|$ | $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x$

$\tan = \frac{\sin}{\cos}$ | $\int f(x) \cdot f'(x) = \frac{1}{2}(f(x))^2$ | $\int x\sin x = \sin x - x\cos x$

Supstitution: $dx = \varphi'(u)du$ | $\int \ln x = x\ln x - x$

$\int x^2 \sin x = 2x\sin x + (2-x^2)\cos x$