Norm: $\|\bullet\|: X \to [0,\infty]\ \forall x,y \in X \wedge \forall \lambda \in \mathbb{R}$

(1) $\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$

(2) $\|\lambda \cdot x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$

(3) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Eigenschaften (1) $\|a\| - \|b\| \leq \|a+b\|$

(2) $\|a-b\| - \|c-d\|$
$\leq \|a-c\| + \|b-d\|$

Normen: $\|(x_1, x_2, \dots, x_n)\|_p = \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}$

$p \in \mathbb{R}, p \geq 1, p = 2, \|\bullet\|_2$ euklidisch

Frobenius Norm $M(m,n) = \left\{ A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \dots & & \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \right\}$

$\|M\| = \left(\sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} |a_{ik}|^2\right)^{\frac{1}{2}}\ \forall A \in M(m,n)\ \forall x \in \mathbb{R}^n$,

- $\|Ax\|_2 \leq \|A\| \cdot \|x\|$ • $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$ • $\|A^{-1}\| \geq \frac{1}{\|A\|}$

Matrix Multiplikation $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix}$ c_1

$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$

$(A+B) \cdot C = AC + BC$ | $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$

$A \cdot B \neq B \cdot A$

Inverse Matrix $A \cdot A^{-1} = I$

$\det A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} -$

Skalarprodukt (euklidisch) $\langle \bullet, \bullet \rangle: X \cdot X \to \mathbb{R}: \forall x,y \in X, \forall \lambda \in \mathbb{R}$

(a) $\langle x,x \rangle \geq 0 \wedge \langle x,x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$

(b) $\langle x,y \rangle = \langle y,x \rangle$

(c) $\langle \lambda x + \mu y, z \rangle = \lambda \langle x,z \rangle + \mu \langle y,z \rangle$

$\Rightarrow \|x\|: \sqrt{\langle x,x \rangle}$ eukl. Norm

Eigenschaften

(1) $|\langle x,y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|\ \forall x,y \in X$

$|\langle x,y \rangle|^2 = \langle x,x \rangle \cdot \langle y,y \rangle$ falls x,y linear abhängig

Cauchy-Schwarz-Ungleich.

(2) Bio:Formel $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x,y \rangle$

Sei $(X, \|\bullet\|)$ norm. VR

Folge x_j konvergiert falls: $\forall \varepsilon > 0\ \exists j_0 \in \mathbb{N}: \|x_j - x\| \leq \varepsilon\ \forall j \geq j_0$

$\Rightarrow x$ ist Grenzwert $x = \lim_{j\to\infty} x_j \wedge x_j \xrightarrow{j\to\infty} x$

Reihe $\sum_{j=1}^{\infty} x_j$ konvergiert von Folge von $s_j = \sum_{n=1}^{j} x_n$ konvergiert

$x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n = \lim_{j\to\infty} \sum_{n=1}^{j} x_n = \lim_{j\to\infty} s_j$

Konvergenz Vektor $y = \sum_{k=1}^{n} y_k b_k$ b_k - Basisvektor

$\lim_{j\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} x_{jk} b_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \left(\lim_{j\to\infty} x_{jk}\right) b_k = y \Rightarrow$ Koord.weise Konvergenz

x_j, y_j Vektorfolg. λ_j, μ_j Zahlenfolg. A_j, B_j Matrixfolg. | $\lim_{j\to\infty} (\lambda_j x_j + \mu_j y_j) = \lim_{j\to\infty} \lambda_j \cdot \lim_{j\to\infty} x_j + \lim_{j\to\infty} \mu_j \cdot \lim_{j\to\infty} y_j$

$\lim (A_j x_j) = \lim A_j \cdot \lim x_j$ ebenso für A, x, μ

ebenso für Funktionen $\lambda, \mu: M \to \mathbb{R}$, $f, g: M \to \mathbb{R}^n$ $A, B: X \to M(m,n)$

[I] $\lim (\lambda(x) f(x) + \mu(x) g(x)) = \lim (\lambda(x)) \lim f(x) + \lim(\mu(x)) \lim g(x)$

[II] $\lim (A(x) f(x)) = \lim A(x) \cdot \lim f(x)$

- Jede konvergente Folge ist beschränkt | $\exists M > 0: \|x_j\| \leq M\ \forall j \in \mathbb{N}$
- Cauchy-Kriterium ($\forall$ konvergente Folgen in Metr. Raum ist cauchy)

I $\forall \varepsilon > 0\ \exists j_0 \in \mathbb{N}: \|x_j - x_k\| \leq \varepsilon\ \forall k,j \geq j_0$

II Vektorreihe konvergiert $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists j_0 \in \mathbb{N}: \|\sum_{l=j}^{k} x_l\| \leq \varepsilon\ \forall k,j \geq j_0$

Exponentialreihe Matrix $\exp A := \sum_{j=0}^{\infty} \frac{A^j}{j!}$

(i) $\exp(A+B) = \exp A \cdot \exp B$ falls $AB = BA$

(ii) $\exp(BAB^{-1}) = B\exp(AB^{-1})$ falls $\det B \neq 0$

(iii) $\exp A = \lim_{j\to\infty} \left(I + \frac{A}{j}\right)^j$

(iv) $\det e^A \neq 0 \wedge (e^A)^{-1} = e^{-1}$ $\exp(A)$ stetig

---

Topologie Umgebung

$B_r(a) := \{x \in X : d(a,x) < r\}$ Ball um a

U ist Umgebung von X falls:

$\exists \varepsilon > 0: B_\varepsilon(x) \subset U$

Offene Menge, ist Umgebung aller ihrer Punkte

$K_r(x) := \{y \in X \mid \|x-y\| < r\}$ offene Kugel

$\bar{K}_r(x) := \{y \in X \mid \|x-y\| \leq r\}$ abgeschlossen

$\mathbb{R}^n$ ist offen | Innerer Punkt $\exists r > 0$ mit $K_r(x) \subseteq M$

Menge aller innerer Punkte $\mathring{M}$

M ist offen falls $M = \mathring{M}$

offen $\Leftrightarrow$ kein Randpunkt enthalten

abgeschlossen $\Leftrightarrow$ alle Randpunkte enthalten

Randpunkt $\forall r > 0$ $K_r(x) \cap M \neq \emptyset$

Menge aller Randpunkte, Rand von M ∂M

Menge $M \cup \partial M =: \bar{M}$

Abschluss von M: $\bar{M}$ | $\bar{M}$ ist abgeschlossen

Abgeschlossen: $\forall x \in \mathbb{R}^n / M\ \exists \varepsilon > 0 \cdot \forall y \in \mathbb{R}^n: \|x-y\| < \varepsilon \notin M$

offen: $\forall x \in M\ \exists \varepsilon > 0: \forall \in \mathbb{R}^n: \|x-y\| < \varepsilon$ ist auch $\in M$

$\bigcup_{i\in I} U_i$ endliche Vereinigung offener Mengen sind offen

$\bigcap_{n=1}^{\infty} U_i$ unendliche Vereinigung offener Mengen müssen nicht offen sein

Für abgeschlossen ist umgekehrt

$\emptyset, X$ sind offen und abgeschlossen

M ist offen $\Leftrightarrow X \setminus M$ abgeschlossen

Vollständigkeit: jede Cauchy-Folge konvergiert

stetig f ist stetig im Punkt a

falls $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ d.h. $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$

$\forall x_n$ mit $\lim x_n = a$

falls f stetig in a und g stetig in $b := f(a)$

$\Rightarrow g \circ f$ stetig

stetig $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon: \forall x \in D: \|x - x_0\| < \delta$

gleichmäßig stetig $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x, x_0:$

$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

Differenzieren Diffbar $\Rightarrow$ stetig

Existenz der part. Ableitung $\neq$ Diffbarkeit

alle ∂ Ableitungen exist. $\wedge$ stetig $\Rightarrow C^1$-Funktion

Jakobimatrix von $f(a)$ anstellen

$J_f(a) := \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)\right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$

$Df_a(h) = J_f(a) \cdot h$

Satz von Schwarz

$\forall C^2$-Funkt $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial f}{\partial x_i}\ \forall i,k = 1, \dots, n$

Kettenregel

$d(f \circ g)(x) = df(g) \cdot dg(x)$

Gradient: $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

(a) $\nabla(\alpha f + \beta g) = \alpha \nabla f + \beta \nabla g$

(b) $\nabla(f \cdot g) = f \nabla g + g \nabla f$

(c) $\nabla(f/g) = \frac{g \nabla f - f \nabla g}{g^2}$

Hauptsatz der Differenzial und Integralrechnung

$f: \mathbb{R}^n \supset \Omega \to \mathbb{R}$ C^1-Funkt. φ - C^1-Weg

$f(b) - f(a) = \int_\alpha^\beta \langle \nabla f(\varphi(t)), \dot{\varphi}(t) \rangle dt$

Länge einer Kurve $f: [a,b] \to \mathbb{R}^n$

$L = \int_a^b \|f'(t)\| dt$

Mittelwertsatz $f \in C^1(\Omega)$

$f(a+h) = f(a) + \langle \nabla f(a + \theta h), h \rangle$

Taylor-Formel

$f(x+h) = \sum_{l=0}^{k} \frac{1}{l!} D^{(l)} f(x) \cdot h + R_k(x,h)$

$T_{f(x,a)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n$

Lokales Extrema

$f: \mathbb{R}^n \supset \Omega \to \mathbb{R}$ (bzw. $f(a) \geq f(x)$)

$\exists r > 0: \forall x \in K_r(a) \subset \Omega: f(a) \leq f(x)$

$\nabla f(a) = 0$ kritische Punkt

$H f(a) = \begin{pmatrix} \partial x^2 & \partial x \partial y \\ \partial y \partial x & \partial y^2 \end{pmatrix}$

- $H f(x,y) > 0$ (positive def.) $\Leftrightarrow$ $\det Hf > 0 \wedge \partial x x f(x,y) > 0$
- $H f(x,y) \geq 0$ (neg. def) $\Leftrightarrow$ $\det \partial x x f(x,y) < 0$
- $\det H f(x,y) < 0 \Rightarrow$ Sattelpunkt

$\det = 0$ gibt keine Aussage

C^r-Diffeomorfismus

falls C^r-Abb $\wedge$ C^r-diffbare Umkehrabb

für C^r-Diffeom. Jakobimatrix $df(x)\ \forall x$ invertierbar

Invertierbar falls $\det J \neq 0$

$g = f^{-1}: V \to U$ $dg(f(x)) = (df(x))^{-1}$

$f(x,y,z)$ ist nach z mit $\varphi(x,y) = z$

auflösbar falls $\frac{d\varphi}{dz} \neq 0$ $\neq 0$

$\partial_x \varphi(x,y) = \frac{-\partial x f(x,y,z)}{\partial z f(x,y,z)}$

$0 = \partial x f(x, y, \varphi(x,y)) = \partial x f(x,y,z) + \partial z f(x,y,z) \cdot \partial x \varphi(x,y)$

Riemann-Integral

Linearität: $\int_Q s_1 f_1 + s_2 f_2 \, dV = s_1 \int_Q f_1 \, dV + s_2 \int_{Q} f_2 \, dV$

Monotonie $f_1 \geq 0 \Rightarrow \int_Q f_1 \, dV \geq 0$

Falls $f_1 \leq f_2 \Rightarrow \int_Q f_1 \, dV \leq \int_Q f_2 \, dV$

Dreiecksungl. $\left| \int_Q f_1 \, dV \right| \leq \int_Q |f_1| \, dV$

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y) \, dx \right) dy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y) \, dy \right) dx$$

$$\int_\alpha^\beta f(y) \, dy = \int_a^b f(\varphi(x)) \cdot |\varphi'(x)| \, dx$$

$$\int_{\varphi(\Omega)} f(y) \, d^n y = \int_\Omega f(\varphi(x)) \cdot |\det d\varphi(x)| \, d^n x$$

Länge einer Kurve

$$L(C) = L(\alpha) := \int_a^b \| \dot{\alpha}(t) \| \, dt$$

Skalares Kurvenintegral

$$\int_C f \, ds = \int_C f(x) \, ds := \int_a^b f(\alpha(t)) \cdot \| \dot{\alpha}(t) \| dt$$

Kurvenintegral eines Vektoriellen Feld Weg

$$\int_\alpha v \, dx := \int_a^b \langle v(\alpha(t)), \dot{\alpha}(t) \rangle dt$$

Oberflächenintegral

$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ $\varphi: B \to \mathbb{R}^3$ $B \subset \mathbb{R}^2$

$$\iint f(x) \, d\sigma = \iint_B f(\varphi(u,v)) \, \| \vec{\varphi}_u \times \vec{\varphi}_v \| \, d(u,v)$$

$$\int_M v \cdot d\sigma = \int v(x) \cdot d\sigma(x) := \int_U \langle v \circ \phi, \partial_1 \phi \times \partial_2 \phi \rangle \, du_1 \, du_2$$

$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$\iint_B f(x) \, d\sigma = \iint_B f(\varphi(u,v)) \cdot (\partial_u \varphi \times \partial_v \varphi) \, du \, dv$$

Gaußscher Integralsatz

$$\int_G \operatorname{div}(f(x)) \, dx = \oint_{\partial G} f(x) \, dO$$

$$\int_M \operatorname{rot} v \, d\sigma = \int_{\partial M} v \, dx$$

$$\int_\Omega \operatorname{div} v \, d^3x = \int_{\partial\Omega} v \, d\sigma = \int_{\partial\Omega} v \cdot n \, d\sigma$$

$\operatorname{rot} \nabla u = 0$

$\operatorname{div} \operatorname{rot} v = 0$

$\operatorname{div}(f \cdot v) = \langle \nabla f, v \rangle + f \operatorname{div} v$

$\operatorname{div}(v \times w) = \langle \operatorname{rot} v, w \rangle - \langle v, \operatorname{rot} w \rangle$

Sonstiges

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$$

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \frac{x^0}{0!} - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$$

$e^{ix} = \cos x + i \sin x$

$\sin(x) = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})$

$\cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})$

Integrale

$\int \frac{1}{1+x^2} = \arctan x$

$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x$

$\int x \sin x = \sin x - x \cos x$

$\int \ln x = x \ln x - x$

$\int x^2 \sin x = 2x \sin x + (2-x^2) \cos x$

Ableitungen

$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = -(\arccos)'$

$(\arctan)' = \frac{1}{1+x^2}$

$(\tan)' = \frac{1}{\cos^2}$

Substitution

$$\int_a^b f(s) \, ds = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(\phi(t)) \cdot \phi'(t) \, dt$$

Kurvenintegral

$$\int f := \int_a^b f(c(t)) \cdot \| \dot{c}(t) \| \, dt$$

Koordinaten Transformation

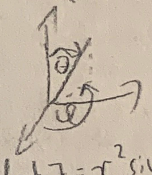
$\vec{x}' = A \cdot \vec{x}$

Funktionaldeterminante Polarko./Zyl.

$$\det J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r$$

$x = r\cos\varphi$ $y = r\sin\varphi$ $z = z$

Kugelkoord.



$x = r \sin\theta \cos\varphi$

$y = r \sin\theta \sin\varphi$

$z = r \cos\theta$ $\det J = r^2 \sin\theta$

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-x^2} d^n x = \pi^{n/2}$$