Ana 3

1. AWP gewöhnlicher DGL

$y' = f(x,y)$ mit (x_0, y_0) $\varphi: [a,b] \to I'$ ist Lösung:

$\varphi'(x) = f(x, \varphi(x)), \forall x \in [a,b]$ und $\varphi(x_0) = y_0$

Maximale Lösung: jede andere Lösung $\tilde{\varphi}: \tilde{I} \to I'$:

$\tilde{I} \subset I_{max}, \tilde{\varphi}(x) = \varphi(x) \; \forall x \in \tilde{I}$

1. Hauptsatz $f: I \times I' \to \mathbb{R}$ stetig

$\varphi: I \to I'$ stetig: ist Lösung:

$$\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \varphi(t))\, dt$$

<u>LB - Lipschitz Bedingung</u> $f: I \times I' \to \mathbb{R}$

$L > 0 \; \forall x \in I, \forall y, \tilde{y} \in I'$:

$$|f(x,y) - f(x,\tilde{y})| < L |y - \tilde{y}|$$

Lokal-Lipschitz stetig

$\Rightarrow$ Lipschitz stetig in einer Umgebung um jedes x_0

- ist $\frac{\partial f}{\partial y}$ beschränkt $\Rightarrow$ LB $\Rightarrow$ Lokal LB
- ist $\frac{\partial f}{\partial y}$ stetig $\Rightarrow$ Lokal LB

2. Hauptsatz: f stetig, Lokal LB nach y

(1) durch jeden Punkt existiert Lsg

- (2) Lösung ist eindeutig

Lösungsstrategie

1. Trennung der Variablen

falls $f(x,y) = g(x) h(y)$ stetig

$$\Rightarrow \int \frac{1}{h(y)} dy = \int g(x)\, dx$$

$\varphi(x) = H^{-1}(G(x))$ mit H, G als Stammfunktion

2. Exakte Gleichung $y' = f(x,y)$

der Form $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$

und $\frac{dy}{dx} = y' = \frac{-P(x,y)}{Q(x,y)}$ $Q(x,y) \neq 0 \; \forall x, y$

falls P, Q ist zusammenhängendes Gebiet, stetig, partiell differenzierbar und es gilt Integrabilität

$$\boxed{\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}} \Rightarrow \frac{\partial \Phi}{\partial x} = P \; / \; \frac{\partial \Phi}{\partial y} = Q$$

$$\Rightarrow P\,dx + Q\,dy = d\Phi(x,y) = 0$$

$$\Rightarrow \Phi(x,y) = \Phi(x_0, y_0) + \int_{x_0}^{x} P(\tilde{x}, y_0)\, d\tilde{x} + \int_{y_0}^{y} Q(x, \tilde{y})\, d\tilde{y} = c$$

Integrierender Faktor $y' = \frac{P}{Q} = \frac{\mu P}{\mu Q} \Rightarrow \mu P dx + \mu Q dy = d\Phi = 0$

falls $\frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right)$ unabhängig von y

$\Rightarrow \mu'(x) = \frac{\mu}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right)$ analog für P

falls $\frac{1}{P}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right)$ unabhängig von x

Lineare DGL: $y' = g(x) \cdot y$

$\Rightarrow$ Lsg: $y = c \cdot e^{G(x)}$

$G(x)$ Stammfunktion von $g(x)$

Inhomogene DGL $y'(x) + g(x) y(x) = s(x)$

$y = y_{homo} + y_{partikulär}$

DGL, zweite Ordnung $F(x, y', y'') = 0$

$\Rightarrow F(x, z, \frac{dz}{dx}) = 0$

mit $z = y'$, $y'' = \frac{dz}{dx}$

Systeme von Differenzialgleichungen

$f: (x,y) \longmapsto (f_1(x,y), \dots, f_n(x,y))$

$y' = f(x,y)$

LB $\|f(x,y) - f(x,\tilde{y})\| < L \|y - \tilde{y}\| \; \forall (x,y)(x,\tilde{y})$

mit $\|y\| = \sqrt{y_1^2 + \dots + y_n^2}$

Hauptsatz $U \subset \mathbb{R}^{n+1}$, $f: U \to \mathbb{R}^n$

stetig und lokal LB offen

zu Punkt $(x_0, c) \in U$ existiert genau eine Lsg

$\varphi: [x_0 + \delta] \times [x_0 - \delta] \to \mathbb{R}^n$

Lineares DGL-System

$$A(x) = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & \dots & a_{1n}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(x) & \dots & a_{nn}(x) \end{pmatrix} \quad b(x) = \begin{pmatrix} b_1(x) \\ \vdots \\ b_n(x) \end{pmatrix}$$

$y' = A(x) \cdot y + b(x)$ lokal LB $\Rightarrow$ eindeutige Lsg

Elemente $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in L(A, 0)$

sind genau dann linear unabhängig wenn sie an einem Punkt linear unabhängig sind

$L(A,b) := \{\varphi: I \to \mathbb{R}^n \mid \varphi$ ist differenzierbar und $\varphi' = A\varphi + b\}$

<u>Fundamentalsystem</u>

Eine Basis $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ von $L(A,0)$ ist Fundamentalsystem von $y' = A \cdot y$

Wronski-Determinante

$f_1, \dots, f_n$ im Intervall I:

$$W(f_1, \dots, f_n) = \left| \begin{pmatrix} f_1 & \dots & f_n \\ f_1' & \dots & f_n' \\ \vdots & & \vdots \\ f^{(n-1)} & \dots & f_n^{(n-1)} \end{pmatrix} \right|$$

W ist Determinante der Fn

für Lösung $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ gilt

falls $W(\varphi_1, \dots, \varphi_n, x_0) = 0 \Rightarrow \varphi_1, \dots, \varphi_n$ lin. abhängig

ist $W(x_0) \neq 0 \Rightarrow \varphi_1, \dots, \varphi_n$ linear unabhängig

$\Rightarrow$ Fundamentalsystem

$W' = (\operatorname{sp} A(x)) W$ mit sp ist Spur

$\Rightarrow W = C \cdot e^{s}$ mit $s: I \to \mathbb{R}$ Stammfunktion von sp

Lösung der DGL

DGL-System mit konstanten Faktoren

sei $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ konstant

und λ Eigenwert von A und

v Eigenvektor und $y' = A \cdot y$ so:

$\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ $x \longmapsto e^{\lambda x} \cdot v$ Lsg

$\Rightarrow (e^{\lambda_1 x} v_1, \dots, e^{\lambda_n x} \cdot v_n)$ Fundamentalsystem

Variation der Konstante

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}' = A \cdot y + B \Rightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = c_0 e^{\lambda_1 x} v_1 + c_1 e^{\lambda_2 x} v_2$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = A \cdot y - y' + B = c_0' e^{\lambda_1 x} v_1 + c_1' e^{\lambda_2 x} v_2 + B$$

Rotationsinvariante Systeme

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ stetig diffbar, f Rotationsinv.

$f(S_\theta x) = S_\theta f(x) \; \forall x \in \mathbb{R}^2$ $\theta \in \mathbb{R}$: $S_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

somit $\exists$ für f: $f(x) = g(x_1^2 + x_2^2) x + h(x_1^2 + x_2^2) S_{\pi/2} x$

mit $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ Anfangswertproblem:

$x'(t) = f(x,t)$ $x_0(0) = \begin{pmatrix} r_0 \cos(\theta_0) \\ r_0 \sin(\theta_0) \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow r'(t) = g(r(t)^2) \cdot r(t)$

$\theta'(t) = h(r(t)^2)$

Lineare DGL n-ter Ordnung

Differenzialoperator $L = D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \dots + a_1 D + a_0$

mit a_i konst D^n n-te Ableitung

damit $y^{(n)} + a_{n-1} y^{n-1} + \dots + a_0 y = 0$

$L(f) = L(xf) - xL(f)$

$Ly = 0$

λ - r-Fache Nullstelle von

$p(t) = t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \dots + a_0$

$\Rightarrow e^{\lambda x}, x e^{\lambda x}, \dots, x^{r-1} e^{\lambda x}$ Lsg von Ly

$y^{(n)} + a_{n-1} y^{n-1} + \dots + a_0 y = 0$ $L = p(D)$

aus $e^{ax - ibx} + e^{ax + ibx} = e^{ax}(c_0 \cos(bx) + c_1 \sin(bx))$

<u>Variation der Konstante</u>

sei $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ Lsg der DGL von

$y^n + a_{n-1} y^{n-1} \dots a_0 y = b(x)$

Lösung ist $y(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k(x) y_k(x)$

$$c_k = \int_{x_0}^{x} \frac{\det \Phi_k(s)}{\det \Phi(s)} ds = \int_{x_0}^{x} \frac{W_k(s)}{W(s)} ds$$

$\Phi_k = W(\varphi_1, \dots, \varphi_{k-1}, 0, \varphi_{k+1}, \dots \varphi_n)(s)$

k-te Spalte ersetzt mit $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(s) \end{pmatrix}$

für $n = 2$

$$y(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{\varphi_1(s)\varphi_2(x) - \varphi_1(x)\varphi_2(s)}{\varphi_1(s)\varphi_2'(s) - \varphi_1'(s)\varphi_2(s)} b(s)\, ds$$

Asymptotisches Verhalten / Stabilität

<u>stabil</u> $[x_0, \infty)$ wenn $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0: \forall z_0 \in \mathbb{R}^n: \|y_0 - z_0\| < \delta$

AWP: $\begin{cases} z'(x) = f(x,z) \\ z(x_0) = z_0 \end{cases}$

eine Lösung auf $[x_0, \infty)$ besitzt und

$\|y(x) - z(x)\| < \varepsilon \; \forall x \geq x_0$ z(x) beginnt in δ Bereich und y und verlässt ε-Bereich nicht

<u>Attraktiv</u> $[x_0, \infty)$ wenn $\exists \delta > 0$ sodass

$\forall z_0 \in \mathbb{R}^n: \|y_0 - z_0\| < \delta$ gilt: AWP: $\begin{cases} z'(x) = f(x,z) \\ z(x_0) = z_0 \end{cases}$

eine Lösung auf $[x_0, \infty)$ besitzt

und $\lim_{x \to \infty} \|y(x) - z(x)\| = 0$

<u>Asymptotisch stabil</u> falls y stabil + attraktiv

<u>Exponentiell stabil</u> falls $\delta, L, \omega > 0$ existieren

$\forall z_0 \in \mathbb{R}^n$ $\|y_0 - z_0\| < \delta$ AWP $\begin{cases} z'(x) = f(x,z) \\ z(x_0) = z_0 \end{cases}$

Lösung $[x_0, \infty)$

$\|y(x) - z(x)\| \leq L \|y_0 - z_0\| e^{-\omega(x - x_0)} \; \forall x \geq x_0$

Exp. stabil $\Rightarrow$ Asymptot. stabil $\Rightarrow$ stabil

für $n = 1$: attraktiv $\Rightarrow$ stabil

<u>Bsp</u> $y'(x) = \alpha y$ $\Rightarrow w = y - z$

$y(x_0) = y_0$ $w = (y_0 - z_0) e^{\alpha x} \Rightarrow |y - z| = |w| = |y_0 - z_0| e^{\alpha x}$

$\Rightarrow$ $\alpha < 0$ exp. stabil

$\alpha = 0$ stabil

$\alpha > 0$ instabil

<u>Autonomes DGS</u> $y'(x) = f(y(x))$

nicht explizit von x abhängig

translationsinvariant: ist y Lösung

so ist $z(x) = y(x - x_0)$ auch Lsg

stationäre Lösung: $y = z$ konst $\forall x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow y$ Nullstelle von f

$\Rightarrow$ solche Nullstelle ist kritischer Punkt

Lösung sei $\begin{cases} y' = Ay \\ y(0) = y_0 \end{cases}$

(1) stabil: wenn alle EW von A: $\mathrm{Re}(\lambda) \leq 0$

und für alle EW: geo. Vielfachheit

halbeinfach $\rightarrow$ = algebraische Vielfachheit

(2) asymptotisch + exponentiell stabil
$\forall$ EW: $Re(\lambda)<0$ außerdem:
$\forall \omega$ mit $s = \max_{\lambda \in EW} Re < -\omega < 0$
$\|e^{Ax} y_0\| \leq M_\omega \|y_0\| e^{-\omega x} \quad \forall x \geq 0$

(3) instabil falls min. 1 EW $Re(\lambda) > 0$
oder $Re(\lambda)=0$ und nicht halbeinfach

<u>Nicht Lineare autonome DGS</u> $y' = f(y)$
y_s kritischer Punkt von f
$$J_f[y_s] = \left(\frac{\partial f_i}{\partial y_j}\right)_{ij} (y_s)$$
(1) alle EW der Jakobimatrix negativen Realteil $\Rightarrow$ exp. stabil
(2) mindestens 1 EW strikt positiv $\Rightarrow$ instabil

<u>Erstes Integral</u> $E(y)$ ist erstes Integral
falls $\nabla \cdot E(y) \cdot f(y) = 0$

<u>Lyapunov-Funktion</u>
f lokal LB, y_s krit. Punkt
$\bar{y}_s$ stationäre Lösung, $V: U \to \mathbb{R}$
(1) Schwache Lyapunov Funktion
$\nabla V(y) \cdot f(y) \leq 0 \; \forall y \in U$
(2) starke Lyapunov Funktion
$\nabla V(y) \cdot f(y) < 0 \; \forall y \in U \setminus \{y_s\}$

<u>Rand und Eigenwertproblem</u>
Dirichlet Randbedingung $u(a) = \eta_1 \; u(b) = \eta_2$
Neumann Randbedingung $u'(a) = \eta_1 \; u'(b) = \eta_2$
Periodische Randbedingung $u(a) = u(b) \; u'(a) = u'(b)$

<u>Fredholm-Alternative</u>
Entweder RWP:
$$\begin{cases} Lu = f & u(a,b) \\ Ru = \eta \end{cases}$$
$\forall f \in C^0$ und $\forall \eta \in \mathbb{R}^2$ eine eind. Lsg
oder RWP $\begin{cases} Lu = 0 \\ Ru = 0 \end{cases}$ besitzt eine nicht triviale Lsg

$$y(x) = \int_0^1 G(x,s) f(s) ds$$
Lösung von $\begin{cases} Lu = f \\ R_1 u = R_2 u = 0 \end{cases}$
ist Greensche Funktion

<u>Funktionanalyse</u>
Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$
(1) Bilinearität
$\langle \lambda u + \mu v, w \rangle = \lambda \langle u, w \rangle + \mu \langle v, w \rangle$
$\langle w, \lambda u + \mu v \rangle = \lambda \langle w, u \rangle + \mu \langle w, v \rangle$
(2) Symmetrie $\langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle$
(3) falls $v \neq 0 \Leftrightarrow \langle v, v \rangle > 0$
Skalarnorm: $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$ und $\langle v, w \rangle = \|v\| \cdot \|w\| \cdot \cos \varphi$
Senkrecht/Orthogonal: $\langle v, w \rangle = 0 \Leftrightarrow v \perp w$
$u, w \subset V \quad U \perp W$
$W = U^\perp = \{v \in V \mid v \perp u, \forall u \in U\}$

(1) Pythagoras $\forall v, w \in V: v \perp w$
$\|v + w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2$
(2) Parallelogrammgl. $\|v+w\|^2 + \|v-w\|^2 = 2\|v\|^2 + 2\|w\|^2$
(3) Cauchy-Schwarz-Ungleichung
$|\langle v, w \rangle| \leq \|v\| \cdot \|w\|$
Zerlegungssatz $U \subset V \wedge \dim V < \infty$
$V = U \oplus U^\perp$
Orthonormalbasis:
Basis $\{b_1, \ldots, b_n\}$ $\langle b_i, b_j \rangle = \delta_{ij} \wedge \|b\| = 1$

<u>Fourierpolynom</u>
$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx$$
$$n \in \{0, 1, 2, \ldots\}$$
$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx$$
$$S_m(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{m} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$$
Basis:
$u_0(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \; u_{2n-1} := \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(nx)$
$u_{2n}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(nx)$
Fourierreihe $f = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$

<u>Hilbertraum</u>
normierter Raum $(X, \|\cdot\|)$ ist Banachraum
oder vollständig:
wenn jede Cauchy-Folge konvergiert
Cauchy: $\forall \varepsilon > 0 \, \exists N(\varepsilon): \|x_k - x_l\| < \varepsilon$
$\forall k, l \geq N(\varepsilon)$
VR ist Hilbertraum wenn $\|x\|$ norm $= \sqrt{\langle x, x \rangle}$

<u>Komplexes Skalarprodukt</u>
$\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}$
$\langle u, v \rangle = u \cdot \bar{v}$

<u>Normierte Vektorräume</u>
$\|u\| = 0 \Leftrightarrow u = 0$ | $\|\lambda u\| = |\lambda| \|u\|$
$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ | $\|a\| - \|b\| \leq \|a + b\|$
$\|a - b\| - \|c - d\| \leq \|a - c\| + \|b - d\|$
$C^0([a,b], \mathbb{R})$ Menge aller stetigen Funktion
$$\|f\|_\infty := \sup_{t \in [a,b]} |f(t)|$$
$$\|f\|_1 := \int_a^b |f(t)| dt$$
$$\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(t)|^p dt\right)^{1/p}$$
<u>Lin. Operator</u>: $T(\lambda x) = \lambda T(x)$
$T(x + y) = T(x) + T(y)$

<u>Beschränkte lineare</u> 166
$A: V \to W$ beschränkt: $\|A(f)\| \leq c \|f\| \; \forall f \in V$
$$\|A\| := \sup_{f \in V \setminus \{0\}} \frac{\|Af\|_W}{\|f\|_V} = \sup_{g \in V \setminus \{0\}, \|g\| = 1} \|Ag\|$$
Beschränkt: $\|A\| < \infty$
• Operator beschränkt $\Leftrightarrow$ gleichmäßig stetig $\Leftrightarrow$ stetig $\Leftrightarrow$ stetig in 1 Punkt $\Leftrightarrow$ stetig in 0

<u>E-Funktion</u>
$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \Big| \quad e^{-i\pi} + 1 = 0$$
$$e^{i\omega t} = \cos(\omega t) + i \sin(\omega t)$$
$$\sin(x) = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix}) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$
$$\cos(x) = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$
<u>Totales Differential</u> $df = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$

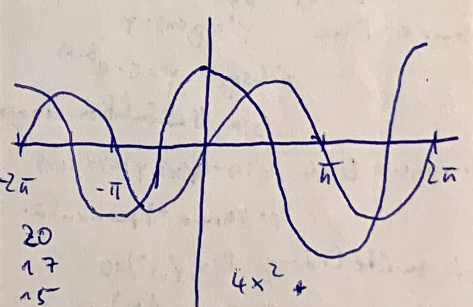
C^1-Differentiationsklasse 1
Menge der stetig diffbar Funktion
<u>Eigenwerte</u> $A \cdot x = \lambda \cdot x$
$A \cdot x = \lambda E \cdot x$
$(A - \lambda E) x = 0$

<u>Jakobi-Matrix</u>
$$J_f(a) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)\right)_{ij} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_1} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_n} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

<u>Integralgleichung</u>
Volterraisch Lsg von
$y'(x) = f(x, y(x)) \quad y(x_0) = y_0$
$\Updownarrow$
$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t)) dt$$
Kugelkoordinate
$x = r \sin \theta \cos \varphi$
$y = r \sin \theta \sin \varphi$
$z = r \cos \theta$
$$\cos^n(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos((n-2k)x)$$

$y = y_H + \psi, \quad \psi = \phi \cdot c(t)$
Fundamentalsyst.
$c' = \phi^{-1} \cdot B \qquad c = \int \phi^{-1} \cdot B$

$\frac{1}{n} 2x \sin + x^2 \cos + 2 \frac{1}{n^2} \cos + 2x \frac{1}{n} \sin$
$- 2 \frac{1}{n^2} \cos$



$4x^2 +$

20
17
15
10
8
18
132
80

15