$x(t)$ Eindimensionale

$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} = \dot{x}(t)$

$\Delta x = \int_{t_0}^{t_1} v(t) dt \;|\; x(t) = \int_0^t v(t)\, dt$

Newton 1: Trägheitsgesetz

Newton 2: $F = \frac{d}{dt}(m v)$

$p = m \cdot v$ Impuls $\quad F = m \cdot \ddot{x}(t)$ Kraft $\quad F = \dot{p} = \dot{m}v + m\dot{v}$

$p = [\frac{kg\, m}{s}]$ $\quad F\,[N]$ $\quad F \approx k(x - x_0)$ Hookesches Ges.

Reihe: $\frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$

Parallel $k = k_1 + k_2$

kin. Energie $T = \frac{1}{2} m v^2 = E_{kin}$

$\frac{d}{dt} T = F \cdot \dot{x} = P$ Leistung $[\frac{Nm}{s}; W]$

Arbeit: $W(t) = \int_{t_0}^{t} P(t')\, dt'$

hat $F(x)$ Stammfunktion:

$F(x) = -V'(x) = -\frac{dV}{dx}$ konservat. Kraftfeld

Reibung: $F_R = F_R(\dot{x}(t)) = -\gamma \cdot \dot{x}(t)$

Für konservative Kräfte:

$E(t) = T(t) + V(x(t)) \equiv E = const$

Kräfte: Gewicht: $F_g = m \cdot g$

Reibung: $F_R = \mu \cdot F_N$ | Radial: $F_r = m\frac{v^2}{r}$

$F_r = m\omega^2 r$ | Feder: $F_F = D \cdot s$

Auftrieb: $\rho \cdot V \cdot g$ | Gravit: $G \cdot \frac{m \cdot M}{r^2}$

keine Äußere Kräfte: Impulserhaltung

$m v_1 + m v_2 = m v_1' + m v_2'$. Elastisch

$E_{kin_1} + E_{kin_2} = E_{kin_1}' + E_{kin_2}'$

Unelastisch $m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = (m_1 + m_2)\vec{u}$

$\frac{1}{2}(m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2) - \frac{1}{2}(m_1 + m_2) u^2$

Kraftfeld: $F(x) = -V'(x) \quad V(x) = -\int_{x_0}^{x} F(x')\, dx'$

keine Kraft: $0 = F(0) = -V'(0) = 0$

$k > 0 \Rightarrow V(0) = min \Rightarrow F$ rücktreibend, stabil

$k < 0 \Rightarrow V(0) = max \Rightarrow F$ vertreibend, labil

Rotation: $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ Drehimpuls

$\vec{M} = \vec{r}_0 \times \vec{F}$ Drehmoment

$\vec{M} = \dot{\vec{L}}$ $\quad | \vec{L} = m\, \vec{r} \times \vec{v} = m\vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$

$\vec{L} = I \cdot \omega$ I Trägheitstensor

$\vec{L} = J \cdot \vec{\omega}$ | Trägheitsmoment

$J = \int r^2 dm$ | Massenpunkt: $J = m r^2$

Kugel: $\frac{2}{5} m r^2$ | Kegel $J = \frac{3}{10} m r^2$ | Zylinder: $\frac{1}{2} m r^2$

$E_{kin} = \frac{1}{2} J \omega^2$

Harmonischer Oszilator:

$m\ddot{x} = -kx \quad E = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 = const$

$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad x(t) = a_1 \sin(\omega t) + a_2 \cos(\omega t)$

$x(t) = A \sin(\omega t + \delta)$

Überlagerungsgleichung: $A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos(\delta_1 - \delta_2)$

Gedämpft: $m\ddot{x} = -kx - m\gamma\dot{x} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$

Verschieden (sy. Kriechfall $\gamma > 2\omega_0$

Schwingfall $\gamma < 2\omega_0$ Grenzfall

Güte Maß für Ablelungen $Q = 2\pi \frac{E}{\Delta E} = \frac{\omega}{\gamma}$

Resonanz: $\gamma < \sqrt{2}\omega_0 \quad A_R = \frac{\alpha_0}{\gamma \omega_\gamma}$

$\omega_\gamma = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{2}}$

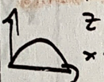
Reibung: $F_H = \mu_H \cdot F_N$

Seil mit n Windg: $F_B = F_0 e^{-2\pi n \mu_H}$

Rollreibung: $M_R = \mu_R F_N$

schiefe Ebene: $\mu_R = r \tan(\alpha_R)$

Wurfparabel $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$



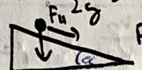
$z = 0$

$x = v_0 \cos \alpha t$

$y = v_0 \sin \alpha t - \frac{1}{2} g t^2$

$L = \frac{v_0^2}{g} \sin(2\alpha)$

$H = \frac{v_0^2}{2g} \sin^2 \alpha$



$F_\pi = mg \sin \alpha$

Kraftfeld rot $\vec{F} = \vec{\nabla} \times \vec{F}$

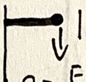
rot $\vec{F} = \vec{0}$ wirbelfrei

rot $\vec{F} \neq \vec{0}$ wirbelfeld

div $\vec{F} = \vec{\nabla}\vec{F}$ div $\vec{F}$ ist skalarfeld

Kraftfeld ist Potential: $-\text{grad } V(\vec{r}) = \vec{F}(\vec{r})$

Energieerhaltung bei konservativen: $\oint \vec{F}(\vec{r})\, d\vec{r} = 0$



$I = \int_A (y - y_0)^2 dx\, dy$

Rotationsparaboloid $z(r) = z_0 + \frac{\omega^2}{2g} r^2$

$p = \frac{F}{A} \quad d\vec{F}_p = -\text{grad}\, p\, dV$

$\text{grad}\, p(\vec{r}) = \vec{0} \Rightarrow p = const.$

Deformation von Festkörpern

Zugspannung: $\sigma = \frac{F}{A}$

Relative Dehng: $\varepsilon = \frac{\Delta L}{L}$

Hookesches Ges. $\sigma = E\varepsilon$

Querkontraktion $\mu = \frac{d\,D/D}{dL/L}$ | $\frac{dV}{V} = \varepsilon(1 - 2\mu)$

Kompression: $p = \frac{F}{A}$

$\frac{\Delta W}{V} = \int \sigma\, d\varepsilon$

Kompresibilität: $K = -\frac{1}{V}\frac{dV}{dp} = \frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dp} \quad K = \frac{1}{K}$

$K = \frac{3(1 - 2\mu)}{E}$ | Torsion: $D = \frac{\pi r^4}{2L} G$

$G = \frac{E}{2(1 + \mu)} \quad \tau = G \cdot \alpha \mid M_{el} = -D \cdot \phi$

$T = \frac{2\pi}{\Omega} = \frac{2\pi}{r^2}\sqrt{\frac{2IL}{\pi G}}$ mit $I = \frac{2}{5} m R^2$

Barometrische Höhenformel

$p(z) = p(0) \cdot e^{-\frac{\rho(0) g}{p(0)} z}$

$\rho(z) = \rho(0) \cdot e^{-\frac{\rho(0) g}{p_0} z}$

Luftdruck: ~~100~~ 1010 hpa

Adhesion an Wand

$H = \sqrt{\frac{2\sigma}{\rho g}(1 - \sin\varphi)}$

$h \approx |2\sigma \cos\varphi / \rho g r$

Kapillaren

Massenelemente bleiben auf Stromlinien

rot $\vec{v} = \vec{0}$ wirbelfrei: $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$ = örtliche Beschleunigung

$(\vec{v}\vec{\nabla})\vec{v}$ konvektions Beschleunigung

Grundgleichung für Reibungsfreie Strömungen.

Eulergleichung: $\rho(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v}\vec{\nabla})\vec{v} = -\nabla p + \rho \vec{g}$

$\vec{\nabla}(\underbrace{\tfrac{1}{2}\rho v^2}_{kin} + \underbrace{p}_{druck} + \underbrace{\rho g z}_{Pot}) = \rho\vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{v})$

Kontinuität: $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}(\rho \vec{v}) = 0$

Zustand: $\rho = \rho(p)$ | in einer Stromlinie:

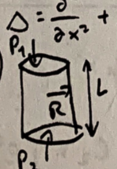
$\varepsilon = \frac{1}{2}\rho v^2 + p + \rho g z = const.$

$p_0 = p + \frac{1}{2}\rho v^2$

Wirbelvektor Feld: $\vec{\Omega}(\vec{r}, t) = \frac{1}{2} \text{rot}(\vec{v}(\vec{r}, t))$

$\vec{f}_R(\vec{r}, t) = \eta \Delta \vec{v}(\vec{r}, t) \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$

$v(r) = \frac{p_1 - p_2}{4 L \eta}(R^2 - r^2)$



Hagen-Poiseulle:

$I = \frac{\pi R^4}{8\eta} |\vec{\nabla} p|$

Navier-Stokes

$\rho(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v}\vec{\nabla})\vec{v} = -\vec{\nabla}p + \rho\vec{g} + \eta\Delta\vec{v}$

Reynoldsche Zahl: $\frac{\rho L^2}{\eta T}$

Bar. Höhenformel: $p = p_0 \cdot e^{-(\frac{\rho_0 g}{p_0} \cdot h)}$

Auftrieb: $\rho \cdot V \cdot g = F$ | Hydraulik $\frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2}$

Wellen:

$y = \hat{y} \cdot \sin(\omega t + \varphi_0)$

$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$

$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}}$

$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{D}}$

$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mga}}$

Flüssigkeitssäule:

$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{2g}}$

$E = \frac{1}{2} m \omega^2 y_{max}^2$

$c = \lambda \cdot f$

$c = \sqrt{\frac{k \cdot p}{\rho}}$

$c = \sqrt{\frac{1}{\rho \cdot \kappa}}$

$c = \sqrt{E/\rho}$

Gekoppelte Oszilator

$\frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x,t) = c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x,t) \quad c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$ Phasengeschw. $\quad c = \frac{\omega}{k} = const.$

Lösungsansatz: $f(x \pm ct)$

Wellengleich. $u(t,x) = f(x+t) + g(x-t)$

$\phi(x) = u(0,x) = f(x) + g(x)$

$\psi(x) = \frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = f'(x) + g'(x)$

$f(x) = \frac{1}{2}(\phi(x) + \int_{x_0}^{x}\psi(\xi)\, d\xi)$

$g(x) = \frac{1}{2}(\phi(x) - \int_{x_0}^{x}\psi(\xi)\, d\xi)$

$u(t,x) = \frac{1}{2}(\phi(x+t) + \phi(x-t) + \int_{x-t}^{x+t}\psi(\xi)\, d\xi)$

Brechung: $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{c_1}{c_2}$

$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$ $\sqrt{\frac{G}{\rho}}$

Doppler: $\nu_B = \frac{\nu_0}{1-\frac{v_Q}{c}}$

$\nu_B = \nu_0\left(1+\frac{v_B}{c}\right)$

$Q = c\cdot m\cdot \Delta T$

Kapazität: $C_{th} = \frac{Q}{\Delta T}$

$C_{th} = c\cdot m$

$Q = \alpha\cdot A\cdot t\cdot \Delta T$

Strahlungsleistung: $P = \sigma\cdot e\cdot A\cdot T^4$

$\Delta l = \alpha\cdot l_0\cdot \Delta T$

$\Delta V = \gamma\cdot V_0\cdot \Delta T \quad \gamma = 3\alpha$

Wärmeleitung: $Q = \frac{\lambda\cdot A\cdot t\cdot \Delta T}{l}$

Ideales Gas: $pV = N\cdot k_B\cdot T$

T const: $\frac{p_1 V_1}{N_1} = \frac{p_2 V_2}{N_2}$

Avogadro: $N_A = 6{,}022\cdot 10^{23}\,\frac{1}{mol}$

$k_B = 1{,}38\cdot 10^{-23}\,J/K$

$N_A k_B = R = 8{,}3166\,J/molK$

Innere Energie $U = \frac{3}{2}Nk_BT = \frac{3}{2}nRT$

für f Freiheitsgrade

$U = \frac{f}{2}Nk_BT$

1AT $= 3f$

2AT $= 5f$

3AT $= 6f$

Gaußverteilung: $w(v_x) = \sqrt{\frac{m}{2\pi k_B T}}\cdot e^{-\frac{mv^2}{2k_BT}}$

$\frac{1}{N}\frac{dN}{dv} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{m}{k_BT}\right)^{\frac{3}{2}} v^2 e^{-\frac{mv^2}{2k_BT}}$

Stoßwirkungsquerschnitt $\sigma_s = (2r)^2\pi$

Mittlere freie Weglänge: $\Lambda = \langle s\rangle = \int_0^\infty \rho(s)s\,ds = \frac{V}{N\sigma_s}$

Stoßzeit: $\tau = \frac{\Lambda}{\langle v\rangle} = \frac{V}{N\sigma_s}\sqrt{\frac{\pi m}{8k_BT}}$

Van der Waalsgleichung $\left(p + a\frac{n^2}{V^2}\right)(V-nb) = nRT$

besser als $p = \frac{RT}{V_m}$

Kohäsionsdruck

Kovolumen verringertes molares Volumen

Schmelzwärme: $\Lambda' = T\frac{dp}{dT}(V_{flüssig} - V_{fest})$

Fick'sches Gesetz: $\vec{j} = -D\vec{\nabla}n$

$\vec{j}$ mittlere Teilchenstromdichte

D Diffusionskonstante

Kontinuitätsgl. $\frac{\partial n}{\partial t} + \vec{\nabla}\vec{j} = 0$

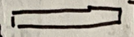
Diffusionsgl. $\frac{\partial n}{\partial t} - D\Delta n = 0$

Wärmestromdichte $\vec{j}_Q = -\lambda\vec{\nabla}T$

λ Wärmeleitfähigkeit

$\frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\lambda}{\rho c}\Delta T = 0 \quad \frac{\lambda}{\sigma_{el}} = const.$

elektrische Leitfähigkeit

T_1  T_2

$T = T_1 + \frac{T_2 - T_1}{L}x$

Stefan-Boltzmann Strahlungsgesetz

$\frac{dU}{dt} = A\sigma T^4$

$\sigma_{max} = \frac{\pi^2 k_B^4}{60\hbar^3c^2} = 5{,}67\cdot 10^{-8}\,\frac{W}{m^2K^4}$

$\Delta W = -F\Delta s = -pA\Delta s = -p\Delta V$

$dU = đQ + đW$ 1. HS Thermodynamik

$\int_1^2 dU = U_2 - U_1$

adiabatisch $đQ = 0$

isotherm $T = const.$

isobar $p = const.$

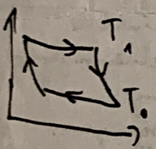
isochor $V = const.$

isentrop $S = const.$

Adiabatisch: $pV^\kappa = const$

$\kappa = \frac{f+2}{f}$

Carnot-Prozess



Wirkungsgrad $\eta = \frac{T_1 - T_0}{T_1}$

2. HS: Wärme fließt nie von selbst vom kälteren ins Wärmere

$\Lambda = T\frac{dp_s}{dT}(V_G - V_F)$

$D_s \propto e^{-\frac{\Lambda}{RT}}$

$\Delta S = \frac{Q_{rev}}{T}$

$\Delta S = k_B\cdot \ln(W)$

$S(z) = \int_{z_0}^{z}\frac{đQ_{rev}}{T}$

Isotherme exp.

$\Delta S_{Gas} = R\cdot\ln\frac{V_2}{V_1}$

$V_0 = 2{,}2414\cdot 10^{-2}\,\frac{m^3}{mol}$

$p\cdot V = n\cdot R\cdot T$

$R_s = \frac{R}{M}$

isotherm: $p\cdot V = const.$

isobar: $\frac{V}{T} = const.$

isochore $\frac{p}{T} = const.$

adiabatisch $\frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\kappa-1}$

$p_1\cdot V_1^\kappa = p_2\cdot V_2^\kappa$

$\kappa = \frac{f+2}{f}$

$\bar{v} = \sqrt{\frac{3R\cdot T}{M}}$

$\bar{E}_{kin} = \frac{3}{2}k\cdot T$

$p\cdot V = \frac{1}{3}Nm_T\cdot\bar{v}^2$

$p\cdot V = N\cdot k_B\cdot T$

$p\cdot V = n\cdot R\cdot T$

$p = \frac{1}{3}\rho\bar{v}^2$

$p\cdot V = \frac{2}{3}N\cdot\bar{E}_{kin}$

$V = \frac{1}{3}a^2h$ Pyramide

$V = \frac{\pi}{3}r^2h$ Kegel

$V = \frac{\pi}{3}h(r_2^2 + r_2r_1 + r_1^2)$ Pyramidenstumpf

$V = \frac{4}{3}\pi r^3$ Kugel

$\sin^2 + \cos^2 = 1$

$\tan\alpha = \frac{\sin}{\cos}$

$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$

$(\ln x)' = \frac{1}{x}$

$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$(\arctan)' = \frac{1}{1+x^2}$

$(\tan)' = \frac{1}{\cos^2}$

$\int\ln x = x\ln x - x$

DGL 2.Ord.:

λ_1,λ_2 reell $C_1e^{\lambda_1x} + C_2e^{\lambda_2x}$

$\lambda_1 = \lambda_2$ reell $(C_1 + C_2x)e^{\lambda x}$

λ_1,λ_2 komplex: $\sigma \pm i\omega$

$e^{\sigma x}\left[C_1\cos(\omega x) + C_2\sin(\omega x)\right]$