$\int_\gamma f(\vec x)\, ds = \int f(\vec\gamma(t))\,||\dot{\vec\gamma}||dt$ $\int_\gamma \vec f(\vec x)\, d\vec x = \int \vec f(\vec\gamma(t))\,\dot{\vec\gamma}\, dt$

$\iint_F f(\vec x) d\sigma = \iint_F f(\vec\varphi(u,v))\cdot||\vec\varphi_u\times\vec\varphi_v||\,d(u,v)$

$\iint_F \vec f(\vec x)d\vec\sigma = \iint_F \vec f(\vec\varphi(u,v))\cdot(\vec\varphi_u\times\vec\varphi_v)\,d(u,v)$

$\iiint_V f(\vec x)dV = \iiint_V f(\vec\xi(u,v,w))\left(\frac{\partial\vec\xi}{\partial u}\times\frac{\partial\vec\xi}{\partial v}\right)\cdot\frac{\partial\vec\xi}{\partial w}$

Zylinderkoor. $grad\phi = \vec e_r\frac{\partial\phi}{\partial r}+\vec e_z\frac{\partial\phi}{\partial z}+\vec e_\varphi\frac1r\frac{\partial\phi}{\partial\varphi}$

$\vec\nabla\vec F = \frac1r\frac{\partial}{\partial r}(rF_r)+\frac1r\frac{\partial F_\varphi}{\partial\varphi}+\frac{\partial F_z}{\partial z}\Big|$ $rot\vec F = \left[\frac1r\frac{\partial F_z}{\partial\varphi}-\frac{\partial F_\varphi}{\partial z}\right]\vec e_r$
$+\left[\frac{\partial F_r}{\partial z}-\frac{\partial F_z}{\partial r}\right]\vec e_\varphi+\frac1r\left[\frac{\partial}{\partial r}(rF_\varphi)-\frac{\partial F_r}{\partial\varphi}\right]\vec e_z$

$\Delta\phi = \frac1r\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\phi}{\partial r}\right)+\frac1{r^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\phi^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}$

Kugel koor. $grad\phi=\vec e_r\frac{\partial\phi}{\partial r}+\vec e_\theta\frac1r\frac{\partial\phi}{\partial\theta}+\vec e_\varphi\frac{1}{r\sin\varphi}\frac{\partial\phi}{\partial\varphi}$

$div\vec F=\frac1{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2F_r)+\frac1{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(F_\theta\sin\theta)+\frac1{r\sin\theta}\frac{\partial F_\varphi}{\partial\varphi}$

$rot\vec F=\frac1{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}(F_\varphi\sin\theta)-\frac{\partial F_\theta}{\partial\varphi}\right]\vec e_r+$
$\left[\frac1{r\sin\theta}\frac{\partial F_r}{\partial\varphi}-\frac1r\frac{\partial}{\partial r}(rF_\varphi)\right]\vec e_\theta+\frac1r\left[\frac{\partial}{\partial r}(rF_\theta)-\frac{\partial F_r}{\partial\theta}\right]\vec e_\varphi$

$\Delta\phi=\frac1{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\phi}{\partial r}\right)+\frac1{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\right)+\frac1{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\phi}{\partial\phi^2}$

Gauß: $\int_V dV\,div\vec F=\int_{\partial V}\vec F d\vec\sigma\Big|$ Stokes $\int_f d\vec f\, rot\vec F=\oint_{\partial F}\vec F d\vec x$

Green: 1. $\int_V dV(\varphi\Delta\psi+(\vec\nabla\psi)(\vec\nabla\varphi)=\oint_{\partial V}\varphi\frac{\partial\psi}{\partial n}d\sigma$

Green: 2. $\int_V dV(\varphi\Delta\psi-\psi\Delta\varphi)=\oint_{\partial V}d\sigma\left(\varphi\frac{\partial\psi}{\partial n}-\psi\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)$

$\frac{\partial\psi}{\partial n}=\vec\nabla\psi\vec n$ $\int_{\vec a}^{\vec b}\vec\nabla f=f(\vec b)-f(\vec a)$

$g_{ij}=\frac{\partial\vec x}{\partial u_i}\times\frac{\partial\vec x}{\partial u_j}$ $g_i=\sqrt{g_{ii}}$ $\Delta V=g_ug_vg_w\Delta u\Delta v\Delta w$

$\vec e_i=\frac{\partial\vec x}{\partial u_i}/\left|\frac{\partial\vec x}{\partial u_i}\right|$ $(ds)^2=(\Delta\vec x)^2=g_{ij}\Delta u_i\Delta u_j$

$grad\varphi=\frac1{g_u}\frac{\partial\varphi}{\partial u}\vec e_u+\frac1{g_v}\frac{\partial\varphi}{\partial v}\vec e_v+\frac1{g_w}\frac{\partial\varphi}{\partial w}\vec e_w$

$div\vec A=\frac{\left[\frac{\partial(g_vg_wA_u)}{\partial u}+\frac{\partial(g_ug_wA_v)}{\partial v}+\frac{\partial(g_vg_uA_w)}{\partial w}\right]}{g_ug_vg_w}$

$rot\vec A=\begin{vmatrix}\frac{\vec e_u}{g_vg_w} & \frac{\vec e_v}{g_ug_w} & \frac{\vec e_w}{g_ug_v}\\ \frac{\partial}{\partial u} & \frac{\partial}{\partial v} & \frac{\partial}{\partial w}\\ g_uA_u & g_vA_v & g_wA_w\end{vmatrix}$

$\Delta\varphi=\frac{\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{g_vg_w\partial\varphi}{g_u\partial u}\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{g_ug_w\partial\varphi}{g_v\partial v}\right)+\frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{g_ug_v\partial\varphi}{g_w\partial w}\right)\right]}{g_ug_vg_w}$

$\vec A(\vec B\times\vec C)=\vec B(\vec C\times\vec A)=\vec C(\vec A\times\vec B)$
$\vec A\times(\vec B\times\vec C)=\vec B(\vec A\cdot\vec C)-\vec C(\vec A\cdot\vec B)$
$\vec a\times\vec b=\epsilon_{ijk}a_ib_j\vec e_k$ $\vec a\cdot\vec b=\delta_{ij}a_ib_j\vec e_i$
$\vec\nabla(fg)=f(\vec\nabla g)+g(\vec\nabla f)$
$\vec\nabla(\vec A\vec B)=\vec A\times(\vec\nabla\times\vec B)+\vec B\times(\vec\nabla\times\vec A)+(\vec A\vec\nabla)\vec B+(\vec B\vec\nabla)\vec A$
$\vec\nabla(\vec A\times\vec B)=\vec B(\vec\nabla\times\vec A)-\vec A(\vec\nabla\times\vec B)$
$\vec\nabla(f\vec A)=f(\vec\nabla\times\vec A)-\vec A\times(\vec\nabla f)$
$\vec\nabla\times(\vec A\times\vec B)=(\vec B\vec\nabla)\vec A-(\vec A\vec\nabla)\vec B+\vec A(\vec\nabla\vec B)-\vec B(\vec\nabla\vec A)$
$\vec\nabla(\vec\nabla\times\vec A)=0$ $\vec\nabla\times(\vec\nabla f)=0$
$\vec\nabla\times(\vec\nabla\times\vec A)=\vec\nabla(\vec\nabla\vec A)-\vec\nabla^2\vec A$
$\frac{d\vec A}{dt}=(\dot{\vec x}\vec\nabla)\vec A+\frac{\partial\vec A}{\partial t}$
$\delta(x)=\lim_{\epsilon\to0}\frac1\pi\frac{\epsilon}{x^2+\epsilon^2}$ $\Delta\frac1{|\vec x|}=-4\pi\delta(\vec x)$
$\delta[g(x)]]=\sum_n\frac{1}{|g'(x_n)|}\delta(x-x_n)$

Taylor-Entwicklung Felder

$\frac1{|\vec r-\vec r'|}=\sum_{n=0}^\infty\frac1{n!}(\vec r'\vec\nabla_{\hat r})^n\frac1{|\vec r-\hat r|}\Big|_{\hat r=0}$

$\frac{\alpha}{|\vec r-\vec r'|}=\alpha\left[\frac1{|\vec r'|}+\frac{\vec r\vec r'}{|\vec r'|^3}+\frac12\frac{3(\vec r\vec r')^2-\vec r^2\vec r'^2}{\vec r'^5}\right]$

$|\vec r-\vec r'|=\sqrt{|\vec r-\vec r'|^2}=\sqrt{|r|^2+|r'|^2-2|\vec r||\vec r'|\cos\theta}$
$\sin(x)=\sum(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ $\cos(x)=\sum(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}$
$\sin(x)=\frac1{2i}(e^{ix}-e^{-ix})$ $\cos(x)=\frac12(e^{ix}+e^{-ix})$
$\sinh x=\frac12(e^x-e^{-x})=-i\sin(ix)$
$\cosh x=\frac12(e^x+e^{-x})=\cos(ix)$ $(e^{i\varphi})^*=e^{-i\varphi}$
$e^{ix}=\cos(x)+i\sin(x)$ $|x\vec e_x\pm y\vec e_y|=|y\vec e_x\pm x\vec e_y|$
$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin(\alpha)cos(\beta)\pm\cos(\alpha)\sin(\beta)$
$\sin(2\alpha)=2\sin(\alpha)\cos(\alpha)$ $(\arcsin(x))'=1/\sqrt{1-x^2}$
$(\arccos(x))'=-1/\sqrt{1-x^2}$ $(\arctan(x))'=1/(1+x^2)$
$\int\frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}=\text{arcsinh}\left(\frac{x}{|a|}\right)=ln\left(|a\sqrt{x^2+a^2}+|a|x|\right)$
$\int x\cos(x)\,dx=x\sin(x)+\cos(x)$
$\int\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}^3}=\frac{x}{a^3\sqrt{x^2/a^2+1}}$
$\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+\frac x2\sqrt{a^2-x^2}$
$\int\sqrt{a^2+x^2}\,dx=\frac{a^2}{2}\text{arcsinh}\frac xa+\frac x2\sqrt{a^2+x^2}$
$\int\arcsin(x)\,dx=x\arcsin(x)+\sqrt{1-x^2}$
$\int\arccos(x)\,dx=x\arccos(x)-\sqrt{1-x^2}$
$\int\arctan(x)\,dx=x\arctan(x)-\frac12\ln(1+x^2)$
$\int\text{arccot}(x)\,dx=x\,\text{arccot}(x)+\frac12\ln(1+x^2)$
$\int\sin^n(x)dx=\frac{n-1}{n}\int\sin^{n-2}(x)dx-\frac1n\cos(x)\sin^{n-1}(x)$
$\int\cos^n(x)dx=\frac{n-1}{n}\int\cos^{n-2}(x)dx+\frac1n\sin(x)\cos^{n-1}(x)$

Lagrange 1. $m\ddot{\vec x}=\vec K+\lambda\vec\nabla\varphi(\vec x,t)$
Ekin $\frac12m(r^2[\dot\theta^2+\dot\varphi^2\sin\theta]+\dot r^2)$ $\frac12m(\dot r^2+r^2\dot\varphi^2+\dot z^2)$
$L=T(q,\dot q,t)-V(q,t)$ $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot q}-\frac{\partial L}{\partial q}=0$
Zentralfeld:$V_{eff}=V(r)+\frac12\frac{L^2}{mr^2}$

kleinste Wirkung $S=\int_{t_1}^{t_2}L(q_i,\dot q_i)dt$

$\mathcal H(q,p,t):=\left\{\sum_{i=1}^n\dot q_ip_i\right\}-\mathcal L(q,\dot q,t)$, mit $\dot q=\dot q(q,p,t)$

$\frac{\partial\mathcal H}{\partial p_i}=\dot q_i$ $\frac{\partial\mathcal H}{\partial q_i}=-\frac{\partial\mathcal L}{\partial q_i}=-\dot p_i$ Bewegungsgelichungen
$\dot q_k=\frac{\partial\mathcal H}{\partial p_k}$ $\dot p_k=-\frac{\partial\mathcal H}{\partial q_k}$ Hamiltonfunk. erhalten
$F_1(q,Q)=F$ $p_i=\frac{\partial F_1}{\partial q_i}, P_i=-\frac{\partial F_1}{\partial Q_i}$
$F_2(q,P)=F+\sum_iQ_iP_i$ $p_i=\frac{\partial F_2}{\partial q_i}, Q_i=\frac{\partial F_2}{\partial P_i}$
$F_3(p,Q)=F-\sum_iq_ip_i$ $q_i=-\frac{\partial F_3}{\partial p_i}, P_i=-\frac{\partial F_3}{\partial Q_i}$
$F_4(p,P)=F+\sum_i(Q_iP_i-q_ip_i)$ $q_i=-\frac{\partial F_4}{\partial p_i}, Q_i=\frac{\partial F_4}{\partial P_i}$

Elektrostatik $Q=\int_V d^3x\rho(\vec x)$ $I=\int_F\vec j\,d\vec\sigma$

$\vec F=\frac{q\cdot q'}{4\pi\epsilon_0}\frac{(\vec x-\vec x')}{|\vec x-\vec x'|^3}$ $\vec F(\vec r)=\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\int\rho(\vec r')\frac{(\vec r-\vec r')}{|\vec r-\vec r'|^3}d\vec r'$

$\vec E(\vec x)=\sum_{i=1}^N\frac{q_i(\vec x-\vec x_i)}{4\pi\epsilon_0|\vec x-\vec x_i|^3}$ $\vec E(\vec x)=\int d^3y\frac{\rho(\vec y)(\vec x-\vec y)}{4\pi\epsilon_0|\vec x-\vec y|^3}$

$\vec\nabla\vec E=\frac{\rho(\vec x)}{\epsilon_0}$ $\vec E=-\vec\nabla\phi$ $\vec\nabla\times\vec E=0$ $\oint\vec Ed\vec x=0$

$-\vec\nabla^2\phi=\frac{\rho(\vec x)}{\epsilon_0}$ $\phi=\int d^3y\frac{\rho(\vec y)}{4\pi\epsilon_0|\vec x-\vec y|}$ $W=\frac{\epsilon_0}{2}\int d^3x|\vec E|^2$
$W=\frac1{8\pi\epsilon_0}\sum_{j\neq i=1}^n\frac{q_iq_j}{|\vec x_i-\vec x_j|}$ $V_{Dipol}=-\vec p\vec E(\vec x)$
Kond.:$U=\frac{xQ}{\epsilon_0A}$ $W=\frac{\epsilon_0A}{2}\int_0^d\frac{Q^2}{\epsilon^2A^2}dx=\frac12CU^2$ $C=\frac QU$
Dipol:$\phi(\vec x)=\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{|\vec x-\frac12d\vec n|}-\frac{1}{|\vec x+\frac12d\vec n|}\right)$
$\phi(\vec x)=\frac{\vec p\vec x}{4\pi\epsilon_0|\vec x|^3}=-\vec p\vec\nabla\frac{1}{4\pi\epsilon_0|\vec x|}$
$\vec p=qd\vec n$ $\vec F_{dipol}=(\vec p\vec\nabla)\vec E$ $\vec M_{dipol}=\vec p\times\vec E$
Monopol/Dipol-/Quadropolmoment: $q=\int d^3\vec x'\rho(\vec x')$
$\vec p=\int d^3\vec x'(\vec x'\rho(\vec x'))$ $Q_{ij}=\int d^3\vec x'(\rho(\vec x')(3x_i'x_j'-\vec x'^2\delta_{ij})$
$4\pi\epsilon_0\phi(\vec x)\overset{R\ll|\vec x|}{\approx}\frac{q}{|\vec x|}+\frac{\vec x\vec p}{|\vec x|^3}+\frac12\sum_{i,j=1}^3Q_{ij}\frac{x_ix_j}{|\vec x|^5}+\ldots$

Randwertproblem:$\phi_1\phi_2$ sein Lösungen $\psi=\phi_1-\phi_2$
auf ∂V bekannt: Dirichlet:$\phi\Rightarrow\psi=0$
Neumann: $\vec n\vec\nabla\psi=\frac{\partial\psi}{\partial n}\Rightarrow\vec n\vec\nabla\psi=0$
$\int_V(\vec\nabla\psi)(\vec\nabla\psi)=\oint_{\partial V}\psi\vec n\vec\nabla\psi d\sigma-\int_V\psi\Delta\psi dV\Rightarrow$ Eindeutig
$\phi(\vec x)=\frac1{4\pi\epsilon_0}\int_V dx'\frac{\rho(\vec x')}{|\vec x-\vec x'|}$:Potential mit Randwert:
$+\frac1{4\pi}\int_{\partial V}df\left(\frac1{|\vec x-\vec x'|}\frac{\partial\phi}{\partial n'}-\phi(\vec x')\frac{\partial}{\partial n'}\frac{1}{|\vec x-\vec x'|}\right)$
$\Delta_xG(\vec x,\vec x')=-\delta^{(3)}(\vec x-\vec x')$ $G(\vec x,\vec x')=\frac1{4\pi}\frac1{|\vec x-\vec x'|}+f(\vec x,\vec x')$
Dirichlet: $\phi(\vec x')|_{\partial V}=\omega(\vec x')$ wähle $f(\vec x,\vec x')$ so, dass :

$\oint_{\partial V}df'G_D(\vec x,\vec x')\frac{\partial\psi}{\partial n'}$ wähle:$G_D(\vec x,\vec x')=0$ $\vec x'\in\partial V$, $\vec x\in V$

$\phi(\vec x)=\frac1{\epsilon_0}\int_Vd^3x'\rho(\vec x')G_D(\vec x,\vec x')-\oint_{\partial V}df'\omega(\vec x')\frac{\partial G_D(\vec x,\vec x')}{\partial n'}$

Neumann: $-\frac{\partial\phi}{\partial n}\Big|_{\partial V}=E_\perp=\nu(\vec x)$ wähle $f(\vec x,\vec x')$ so, dass :

$\oint_{\partial V}df'\phi(\vec x')\frac{G_N(\vec x,\vec x')}{\partial n'}=-\phi_0$ fordern:$\frac{\partial G_D}{\partial n'}=-\frac{1}{|\partial V|}$

$\phi(\vec x)=\frac1{\epsilon_0}\int_Vd^3x'\rho(\vec x')G_N(\vec x,\vec x')-\oint_{\partial V}df'G_N(\vec x,\vec x')\nu(\vec x)$

Green Funktion: Halbebene: $H=\{\vec x\in R^3;x_3>0\}y_3=-y_{S3}$
$G_D=\frac1{4\pi}\frac1{|\vec x-\vec y|}-\frac1{4\pi}\frac1{|\vec x-\vec y_S|}$ $G_N=\frac1{4\pi}\frac1{|\vec x-\vec y|}+\frac1{4\pi}\frac1{|\vec x-\vec y_S|}$
auß. Kugel: $\vec y_I=\frac{R^2}{|\vec y|}\vec y$ $G_D=\frac1{4\pi|\vec x-\vec y|}-\frac{R/|\vec y|}{4\pi|\vec x-(R^2/|\vec y|^2)\vec y|}$
$G_N=\frac1{4\pi|\vec x-\vec y|}+\frac{R}{4\pi|\vec y||\vec x-\vec y_I|}+\frac1{4\pi R}\log\frac{|\vec y||\vec x-\vec y_I|+\vec y(\vec x-\vec y_I)}{|\vec x||\vec y|+\vec x\cdot\vec y}$
Induzierte Ladungen: $\sigma_{ind}=\epsilon_0\vec E\cdot\vec n$ $q=\int_{\partial V}df\sigma$

Separationsansatz: $\Delta\phi=\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\phi=0$
z.B. $\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\phi_{xy}(x,y)=\lambda\phi_{xy}$ $\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\phi_z(z)=-\lambda\phi_z$
Sep. Kugelkoor.: $\phi=R(r)\cdot Y(\theta,\varphi)$ $\Delta=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac2r\frac{\partial}{\partial r}-\frac1{r^2}\vec L^2$
$\vec L^2:=\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\right)^2+\cot\theta\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac1{\sin^2\theta}\left(\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)^2$ $L_z=-i\frac{\partial}{\partial\varphi}$
Eigenwertproblem: $\vec L^2f(\theta,\varphi)=\lambda\cdot f(\theta,\varphi)$ $f(\theta,\varphi)=g(\theta)\cdot h(\varphi)$
$h_m(\varphi)=e^{im\varphi}$, erfüllt $L_zh_m(\varphi)=mh_m(\varphi)$ $0\le m\le l\in N$
$\left[-\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\right)^2-\cot\theta\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{m^2}{\sin^2\theta}-\lambda\right]g_m(\theta)=0$ $u=\cos(\theta)$
$\left[(u^2-1)\left(\frac{\partial}{\partial u}\right)^2+2u\frac{\partial}{\partial u}-\frac{m^2}{u^2-1}-\lambda\right]P(u)=0$ $\lambda=l(l+1)$
$\left[(u^2-1)\left(\frac{\partial}{\partial u}\right)^2+2u\frac{\partial}{\partial u}-\lambda\right]P(u)=0$ $m=0$
$\int_{-1}^1du\,u^kP_l(u)=0$ für alle $0\le k<l$
$\int_{-1}^1du\,P_n(u)P_m(u)=0$ $n\neq m$ $P_l(u)=\frac1{2^ll!}\left(\frac{d}{du}\right)^l(u^2-1)^l$
Normierung: $\int_{-1}^1du\,P_n(u)^2=\frac{2}{2l+1}$
Allg. Fall: $P_l^m(u)=\frac{(-1)^m}{2^ll!}(1-u^2)^{m/2}\left(\frac{d}{du}\right)^{l+m}(u^2-1)^l$
Orthogonalität: $\int_{-1}^1du\,P_l^mP_{l'}^m=\delta_{l,l'}\frac{(l+m)!}{(l-m)!}$
Legendre Polynome P_l^m: $P_0^0=1$ $P_1^0=x$ $P_1^1=-\sqrt{1-x^2}$
$P_2^0=\frac12(3x^2-1)$ $P_2^1=-3x\sqrt{1-x^2}$ $P_2^2=3(1-x^2)$
Kugelflächenfunktionen, erfüllen Eigenwertgleichungen:
$Y_{l,m}(\theta,\varphi)=\sqrt{(2l+1)\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}P_l^m(\cos\theta)e^{im\varphi}$
$\vec L^2Y_{l,m}=l(l+1)Y_{l,m}$ $L_zY_{l,m}=mY_{l,m}$
für jedes l gibt $(2l+1)$ Eigenwerte: $m=-l,-l+1,\ldots,l-1,l$
$Y_{0,0}=1$ $Y_{1,0}=\sqrt3\cos\theta=\sqrt3\frac zr$
$Y_{1,\pm1}=\mp\sqrt{3/2}\sin\theta e^{\pm i\varphi}=\mp\sqrt{3/2}\frac{x\pm iy}{r}$
$Y_{2,0}=\sqrt{5/4}(3\cos^2\theta-1)=\sqrt{5/4}\frac{2z^2-x^2-y^2}{r^2}$
$Y_{2,\pm1}=-\sqrt{15/2}\sin\theta\cos\theta e^{\pm i\varphi}=-\sqrt{15/2}\frac{z(x\pm iy)}{r^2}$
$Y_{2,\pm2}=\sqrt{15/8}\sin^2\theta e^{\pm i2\varphi}=\sqrt{15/8}\frac{(x\pm iy)^2}{r^2}$
Orthogonaltiät:

$\int_a^bdx\,U_n^*(x)U_m(x)=\delta_{nm}$ $\sum_{n=1}^\infty U_n^*(y)U_n^*(x)=\delta(x-y)$

$F(\theta,\varphi)=\sum_{l=0}^\infty\sum_{m=-l}^lY_{l,m}(\theta,\varphi)c_{l,m}$

$c_{l,m}=\frac1{4\pi}\int d\theta d\varphi\sin\theta Y_{l,m}^*(\theta,\varphi)F(\theta,\varphi)$

$\phi(r,\theta,\varphi)=\sum_{l=0}^\infty\sum_{m=-l}^lR_{l,m}(r)Y_{l.m}(\theta,\varphi)$

Radial-Lösung: $R_{lm}(r)=r^\alpha\Rightarrow\alpha=l$ und $\alpha=-l-1$
$0=\left[\left(\frac{d}{dr}\right)^2+\frac2r\frac{d}{dr}-\frac{l(l+1)}{r^2}\right]r^\alpha=r^{\alpha-2}[\alpha^2-\alpha+2\alpha-l(l+1)]$
Damit folgt: $R_{lm}(r)=A_{lm}r^l+B_{lm}r^{-(l+1)}$
$\phi(r,\theta,\varphi)=\sum_{l=0}^\infty\sum_{m=-l}^l\left(A_{lm}r^l+B_{lm}r^{-(l+1)}\right)Y_{l,m}(\theta,\varphi)$
Symmetrie in φ: $m=0$
$\Rightarrow\phi(r,\theta))\sum_{l=0}^\infty\sqrt{2l+1}[A_lr^l+B_lr^{-l-1}]P_l(\cos\theta)$
geladene Kugeloberfläche $\sigma(\theta)=\sum_{l=0}^\infty\sqrt{2l+1}\sigma_lP_l(\cos\theta)$
$\sigma_l=\frac12\int_{-1}^1d(\cos\theta)\sigma(\theta)P_l(\cos\theta)$
falls $\phi\to0$ für $r\to\infty\Rightarrow A_{lm}=0$
Multipolentwicklung in Kugelkoordinaten:$\phi\to0$ für $r\to\infty$
$\phi(r,\theta,\varphi)=\sum_{l,m}\frac{Q_{lm}}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{(2l+1)r^{l+1}}Y_{l,m}(\theta,\varphi)$
$B_{lm}=\frac{Q_{lm}}{4\pi\epsilon_0}\frac1{(2l+1)}$ $\int d^2\Omega dr\,r^{l+2}Y_{l,m}^*(\theta,\varphi)\rho(r,\theta,\varphi)$
Additionstheorem: γ winkel zwischen $\vec x,\vec x'$
$\frac1{2l+1}\sum_{m=-l}^lY_{l,m}(\theta,\varphi)Y_{l,m}^*(\theta',\varphi')=P_l(\cos\gamma)$
$\int_0^{2\pi}e^{i\varphi(n-m)}d\varphi=\delta_{nm}$

Magnetostatik $\vec M=\vec m\times\vec B$ $\vec m$ magnetischer Dipol
$\vec j(\vec x,t)=\rho(\vec x,t)\vec v(\vec x,t)$ Stromdichte $I=\int_Fd\vec f\cdot\vec j=dQ/dt$

$\frac{dQ}{dt}=-\int_Vd^3x\vec\nabla\cdot\vec j=-\int_{\partial V}d\vec f\cdot\vec j(\vec x,t)$
oder über: $\vec\nabla\cdot(\vec\nabla\times\vec B)$
Kontinuitätsgl.:$\frac{\partial\rho(\vec x,t)}{\partial t}+\vec\nabla\cdot\vec j(\vec x,t)=0$
Stromfaden: $\vec jd^3x\to Id\vec x\Rightarrow\int_Vd^3x\vec j(\vec x)=\int_Cd\vec xI$
Ampere'sche Gesetz: $\vec F_{12}=\frac{\mu_0I_1I_2}{4\pi}\oint_{C_1}\oint_{C_2}\frac{d\vec x_1\times(d\vec x_2\times\vec x_{12})}{|\vec x_{12}|^3}$
$\vec x_{12}=\vec x_1-\vec x_2$ $I_i=const.$ $\mu_0=4\pi\cdot10^{-7}\frac{kg\,m}{A^2s^2}$ $\epsilon_0\mu_0=\frac1{c^2}$
$d\vec x_1\times(d\vec x_2\times\vec x_{12})=d\vec x_2(d\vec x_1\cdot\vec x_{12})-\vec x_{12}d\vec x_1\cdot d\vec x_2$
1.Term 0 Beitrag: $\vec F_12=\frac{\mu_0I_1I_2}{4\pi}\oint_{C_1}\oint_{C_2}(d\vec x_1\cdot d\vec x_2)\frac{\vec x_{12}}{|\vec x_{12}|^3}$
Biot-Savart:$\vec B(\vec x)=\mu_0I\oint_C\frac{d\vec y\times(\vec x-\vec y)}{4\pi|\vec x-\vec y|^3}$
auf Leiterschlf.: $\vec F=I\oint_Cd\vec x\times\vec B(\vec x)$
auf Leiterschlf.: $\vec M=I\oint_C\vec x\times\left(d\vec x\times\vec B(\vec x)\right)$
für Stromdichte: $\vec B(\vec x)=\mu_0\int d^3y\frac{\vec j(\vec y)\times(\vec x-\vec y)}{4\pi|\vec x-\vec y|^3}$

$\vec\nabla_x\times\frac{\vec j(\vec y)}{|\vec x-\vec y|}=\frac1{|\vec x-\vec y|}\vec\nabla_x\times\vec j-\vec j\times\vec\nabla_x\frac1{|\vec x-\vec y|}=\vec j\times\frac{\vec x-\vec y}{|\vec x-\vec y|^3}$
$\vec\nabla_x\times\vec j(\vec y)=0\Rightarrow\vec B(\vec x)=\vec\nabla_x\times\frac{\mu_0}{4\pi}d^3y\frac{\vec j(\vec y)}{|\vec x-\vec y|}$

Homogene Maxwellgleichung:
$\vec\nabla_x\cdot\vec B=0\Rightarrow0=\int_Vd^3x\vec\nabla\cdot\vec B(\vec x)=\oint_{\partial V}d\vec\sigma\vec B(\vec x)$ Inhomogene Maxwellegleichung:
$\vec\nabla_x\times\vec B(\vec x)=\vec\nabla_x\times\left(\vec\nabla_x\times\frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3y\frac{\vec j(\vec y)}{|\vec x-\vec y|}\right)$
$\vec\nabla\times(\vec\nabla\times\vec I)=\vec\nabla(\vec\nabla\cdot\vec I)-\Delta\vec I$ $\vec I(\vec x)=\frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3y\frac{\vec j(\vec y)}{|\vec x-\vec y|}$
verwenden:$\vec\nabla_y\vec j(\vec y)=-\frac{\partial\rho(\vec y)}{\partial t}=0$, $\vec j(\vec y)=0$ im Unendlichen
$\vec\nabla_x\vec I(\vec x)\overset{P.I.}{=}\frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3y[\vec\nabla_y\cdot\vec j(\vec y)]\frac1{|\vec x-\vec y|}-\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{\partial v\to\infty}d\vec\sigma\frac{\vec j(\vec y)}{|\vec x-\vec y|}$
$\vec\nabla_x\times\vec B(\vec x)=-\Delta_x\frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3y\frac{\vec j(\vec y)}{|\vec x-\vec y|}\Rightarrow\vec\nabla_x\times\vec B(\vec x)=\mu_0\vec j(\vec x)$
Ampersche Durchflutung: $\int_Dd\vec\sigma\cdot(\vec\nabla\times\vec B)=\oint_{\partial D}d\vec x\cdot\vec B=\mu_0I$
Vektorpotential: $\vec B(\vec x)=\vec\nabla\times\vec A(\vec x)$ $\vec A(\vec x)=\frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3y\frac{\vec j(\vec y)}{|\vec x-\vec y|}$
Eichtransformationen: $\vec A'(\vec x)=\vec A(\vec x)+\vec\nabla\Lambda(\vec x)$
Coulomb-Eichung: $\vec\nabla\cdot\vec A(\vec x)=0$ Axiale Eichung: $\vec n\cdot\vec A(\vec x)=0$
$\vec\nabla\times(\vec\nabla\times\vec A)=-\Delta\vec A+\vec\nabla(\vec\nabla\cdot\vec A)\Rightarrow\Delta\vec A(\vec x)=-\mu_0\vec j(\vec x)$
$\vec F=\int d^3x\vec j(\vec x)\times\vec B(\vec x)$ $\vec M=\int d^3x\vec x\times\left(\vec j(\vec x)\times\vec B(\vec x)\right)$
$\int d^3x\vec j(\vec x)=\int d^3x(\vec j\cdot\vec\nabla)\vec x\overset{P.I.}{=}-\int d^3x(\vec\nabla\vec j)\vec x=0$ $\vec\nabla\vec j=0$
Konstantes B-Feld: $\vec m:=\frac12\int d^3y\vec y\times\vec j(\vec y)$ $\vec M=\vec m\times\vec B_0$
Fernfeld: $\vec A(\vec x)=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec m\times\vec x}{|\vec x|^3}+\ldots$

Elektro- und Magnetostatik in Materie:
ρ_{frei} induziert ρ_{Dipol} in Materie $\vec P(\vec x)$ Dipoldichte
$\vec P(\vec x)=\epsilon_0\gamma\vec E+\mathcal O(\vec E^2)$ $\gamma=\chi_l$ Diel. Suszeptibilität
$\rho_{ges}=\rho_{frei}-\vec\nabla\cdot\vec P=\rho_{frei}+\rho_{dipol}$ $\vec D(\vec x)=\epsilon_0\vec E(\vec x)+\vec P(\vec x)$
$\vec\nabla\vec D(\vec x)=\rho_{frei}(\vec x)$ $\vec D(\vec x)=\epsilon\vec E(\vec x)$ mit: $\epsilon=\epsilon_0\epsilon_r$ $\epsilon_r=1+\chi_l$
Übergang zwischen Medien: $\epsilon_r,\vec E,\vec D$ / $\epsilon_r',\vec E',\vec D'$
Gauss'sches Kästchen: $Q=\int_{\partial V}d\vec\sigma\cdot\vec D\approx\vec A\cdot(\vec D-\vec D')$
$\vec n\cdot(\vec D-\vec D')=\sigma$ σ ist Ladung der Grenzflächen, meist 0
Stokes'sche Fläche: $=\oint_Cd\vec x\cdot\vec E\approx\vec L\cdot(\vec E-\vec E')$ $\vec t(\vec E-\vec E')=0$
$D_\perp=D_\perp'$ $\Leftrightarrow$ $E_\perp=\frac{\epsilon'}{\epsilon}E_\perp'$ $E_\parallel=E_\parallel'$ $\Leftrightarrow$ $D_\parallel=\frac{\epsilon}{\epsilon'}D_\parallel'$
Magnetisierung: $\vec B(\vec x)=\mu_0(\vec H(\vec x)+\vec M(\vec x))$ $\vec M=\chi_m\cdot\vec H$
$\mu_r=1+\chi_m\Rightarrow\vec B(\vec x)=\mu\vec H(\vec x)$ $\vec\nabla\times\vec H(\vec x)=\vec j_{frei}(\vec x)$ $\vec\nabla\cdot\vec B=0$
$\oint_{\partial A}d\vec x\cdot\vec H=I_{frei,A}$ $\int_{\partial V}d\vec\sigma\cdot\vec B=0$
Übergang zwischen Medien: $\mu_r,\vec B,\vec H$ / $\mu_r',\vec B',\vec H'$
$B_\perp=B_\perp'$ $\Leftrightarrow$ $H_\perp=\frac{\mu_r'}{\mu_r}H_\perp'$ $(\vec e_t\times\vec e_n)\cdot(\vec H-\vec H')=\vec j_{frei}\cdot\vec e_t$
$H_\parallel=H_\parallel'$ $\Leftrightarrow$ $B_\parallel=\frac{\mu_r}{\mu_r'}B_\parallel'$ Diamagnetismus $\chi_m<0$ $|\chi_m|$ klein
Paramagentismus $\chi_m>0$ Antiferromag. exakte Auslöschung
Randwertprobleme: $\vec x\times\vec H\Rightarrow\vec H=-\vec\nabla\phi_m$ magn. Potential
$\Delta\phi_m=\vec\nabla\vec M(\vec x)$ $\phi_m(\vec x)=-\frac1{4\pi}\int d^3y\frac{\vec\nabla_y\vec M(\vec y)}{|\vec x-\vec y|}$
Trick: $\frac{\vec\nabla_y\vec M(\vec y)}{|\vec x-\vec y|}=\vec\nabla_y\left(\frac{\vec M(\vec y)}{|\vec x-\vec y|}\right)-\vec M(\vec y)\cdot\vec\nabla_y\left(\frac1{|\vec x-\vec y|}\right)$
$\vec\nabla_y(\frac1{|\vec x-\vec y|})=-\vec\nabla_x(\frac1{|\vec x-\vec y|})\Rightarrow\phi_m(\vec x)=-\frac1{4\pi}\vec\nabla_x\int d^3y\frac{\vec M(\vec y)}{|\vec x-\vec y|}$
Fernf. $\phi_m\approx\frac1{4\pi}\frac{\vec x\cdot\vec M_{tot}}{|\vec x|^3}\Rightarrow\vec H\approx\frac1{4\pi}\left[\frac{3(\vec x\cdot\vec M_{tot})\vec x}{|\vec x|^5}-\frac{\vec M_{tot}}{|\vec x|^3}\right]$

Relativistische Formulierung elektromagnetsiche Felder
$x^\mu=(ct,x,y,z)$ $\mu=0,1,2,3$ $x^0=ct$, $x^i=\vec e_i\cdot\vec x$
$x_\mu=\eta_{\mu\nu}x^\nu=(ct,-\vec x)$ $\eta_{\mu\nu}diag(1,-1,-1,-1)$
$(ds)^2=c^2(dt)^2-(d\vec x)^2$ $ds=\sqrt{\dot x^\mu\dot x_\mu}d\tau$ $\dot x^\mu\frac{dx^\mu}{d\tau}$
Wirkung: $S_m=-mc\int_a^bds=-mc\int_a^bd\tau\sqrt{\dot x^\mu\dot x_\mu}$
Wirkung: $S_m=-mc^2\int_{t_1}^{t_2}dt\sqrt{1-\frac{\dot x^2}{c^2}}$
Poincaré-Trafo:$x'^\mu=\Lambda^\mu{}_\nu x^\nu+\alpha^\mu$ mit $\Lambda^\mu{}_\rho\eta_{\mu\nu}\Lambda^\nu{}_\kappa=\eta_{\rho\kappa}$
$\frac{\partial L}{\partial x^i}=0$ $\frac{\partial L}{\partial\dot x^i}=\frac{m\dot x^i}{\sqrt{1-\frac{\dot x^2}{c^2}}}=p^i$ $\frac{\partial L}{\partial x^i}=\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot x^i}\Rightarrow\frac{d}{dt}p^i=0$
Vierer Vektor: $x^\mu=(ct,x,y,z)^T=(ct,\vec x)^T$
Lorenz-Transformation: $x'^\mu=\Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$
Kontravariant: $A'^\mu=\Lambda^\mu{}_\nu A^\nu$ Kovariant: $A'_\mu=\Lambda_\mu{}^\nu A_\nu$
$\Lambda_\mu{}^\nu:=\eta_{\mu\rho}\Lambda^\rho{}_\kappa\eta^{\kappa\nu}=(\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu$ $|A^\mu=(A^0,\vec A)$ $A_\mu=(A^0,-\vec A)$
$A\cdot B:=A^\mu B_\mu=\eta_{\mu\nu}A^\mu$
$B^\nu=A^0B^0-\vec A\cdot\vec B$
Tesor 2.Stufe: $F^{\mu\nu}$ 3.Stufe: $\Lambda^{\mu\nu\rho}$ n.Stufe $\Lambda^{\mu_1\cdots\mu_n}$
$F'^{\mu\nu}=\Lambda^\mu{}_\rho\Lambda^\nu{}_\kappa F^{\rho\kappa}$ $\Lambda'^{\mu\nu\rho}=\Lambda^\mu{}_\alpha\Lambda^\nu{}_\beta\Lambda^\rho{}_\gamma\Lambda^{\alpha\beta\gamma}$
Metrik hebt/senkt: $F_\mu{}^\nu=\eta_{\mu\kappa}F^{\kappa\nu}$ $F_{\mu\nu}=\eta_{\mu\kappa}\eta_{\nu\rho}F^{\kappa\rho}$
$F_{00}=F^{00}$ $F_{0i}=-F^{0i}$ $F_{ij}=F^{ij}$
$F_0{}^0=F^{00}$ $F_0{}^i=F^{0i}$ $F^0{}_i=-F^{0i}$ $F_i{}^j=-F^{ij}$
$\eta^{\mu\nu}=diag(1,-1,-1,-1)$ $\eta_{\mu\nu}=diag(1,-1,-1,-1)$
$\delta^\mu_\nu=diag(1,1,1,1)$ $\delta^\mu_\nu=\eta^{\mu\rho}\eta_{\rho\nu}$ $\delta^\mu_\nu\eta^{\nu\rho}=\eta_{\mu\rho}$

$\epsilon^{\mu\nu\rho\kappa}\epsilon_{\mu\nu\rho\kappa} = -24 \quad \epsilon^{\mu\alpha\beta\gamma}\epsilon_{\nu\alpha\beta\gamma} = -6\delta^\mu_\nu$

$\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\epsilon_{\rho\kappa\alpha\beta} = -2(\delta^\mu_\rho\delta^\nu_\kappa - \delta^\nu_\rho\delta^\mu_\kappa)$

$\epsilon^{\mu\nu\rho\alpha}\epsilon_{\kappa\sigma\delta\alpha} = -\begin{vmatrix}\delta^\mu_\kappa & \delta^\mu_\sigma & \delta^\mu_\delta\\ \delta^\nu_\kappa & \delta^\nu_\sigma & \delta^\nu_\delta \\ \delta^\rho_\kappa & \delta^\rho_\sigma & \delta^\rho_\delta\end{vmatrix}$

$\partial_\mu\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x^\mu} = \left(\frac1c\frac{\partial\varphi}{\partial t}, \vec\nabla\varphi\right) \quad \partial^\mu\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x_\mu} = \left(\frac1c\frac{\partial\varphi}{\partial t}, -\vec\nabla\varphi\right)$

$Div(A) = \partial\cdot A = \frac{\partial}{\partial x^\mu}A^\mu = \frac1c\frac{\partial A^0}{\partial t} + \vec\nabla\vec A = \partial_\mu A^\mu = \partial^\mu A_\mu$

Viererpotential: $A^\mu = (\phi(\vec x), \vec A(\vec x)) \quad A_\mu = (\phi, -\vec A)$

allg. Wirkung: $S_m f = -\frac{e}{c}\int_a^b A_\mu(x)dx^\mu$

gelad. Teilchen: $S = \int_{t_1}^{t_2}\left(-mc^2\sqrt{1-\frac{\dot{\vec x}^2}{c^2}} + \frac{e}{c}\vec A\cdot\dot{\vec x} - e\phi\right)dt$

Lagrange: $L(\vec x,\dot{\vec x},t) = -mc^2\sqrt{1-\frac{\dot{\vec x}^2}{c^2}} + \frac ec \vec A\cdot\dot{\vec x} - e\phi$

$\vec p = \vec p_{mech} + \frac ec A^i(\vec x,t) \Rightarrow \vec p_{mech} = \frac{m\dot x^i}{\sqrt{1-\frac{\dot x^2}{c^2}}}$

$H = c\sqrt{m^2c^2 + \left(\vec p - \frac ec\vec A\right)^2} + e\phi$

relativistische Bewegungsgleichung:

$\frac{d\vec p_{mech}}{dt} = -e\vec\nabla\phi - \frac ec\frac{\partial\vec A}{\partial t} + \frac ec\dot{\vec x}\times(\vec\nabla\times\vec A)$

$\vec E = -\vec\nabla\phi - \frac1c\frac{\partial\vec A}{\partial t} \quad \vec F_m = e\dot{\vec x}\times\vec B \quad \vec B = rot\vec A$

$\frac{d\vec p_{mech}}{dt} = e\vec E + \frac ec\dot{\vec x}\times\vec B \quad \frac{\dot{\vec x}^2}{c^2}\ll 1 \Rightarrow m\ddot{\vec x} = e\vec E + \frac ec\dot{\vec x}\times\vec B$

Eichinvarianz: $A'_\mu(\vec x,t) = A_\mu(\vec x,t) - \frac{\partial\Lambda(\vec x,t)}{\partial x^\mu}$

$\vec A' = \vec A + \vec\nabla\Lambda \Rightarrow \vec B' = \vec\nabla\times\vec A + \vec\nabla\times\vec\nabla\Lambda = \vec B$

$\phi' = \phi - \frac1c\frac{\partial\Lambda}{\partial t} \Rightarrow \vec E' = -\vec\nabla\phi' - \frac1c\frac{\partial\vec A'}{\partial t} =$

$-\vec\nabla\phi - \frac1c\vec\nabla\frac{\partial\Lambda}{\partial t} + \frac1c\frac{\partial\vec A}{\partial t} + \frac1c\vec\nabla\frac{\partial\Lambda}{\partial t} = \vec E$

Kleinste Wirkung: $\delta S = \delta\int_a^b\left(-mc\,ds - \frac ec A_\mu dx^\mu\right) = 0$

Feldstärketensor: $F_{\mu\nu} := \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu}$

Bewegungsgleichung 4erGeschwindigkeit: $mc\frac{du^\mu}{d\tau} = \frac ec F^{\mu\nu}u_\nu$

$F_{0i} = -\partial_i\phi + \frac1c\partial_t A_i = E_i$ mit $\partial_\mu := \frac{\partial}{\partial x^\mu}$

$F_{ij} = \partial_i A_j - \partial_j A_i \quad F_{12} = \partial_2 A^1 - \partial_1 A^2 = -B_z$

$F_{\mu\nu}\begin{pmatrix}0&E_x&E_y&E_z\\-E_x&0&-B_z&B_y\\-E_y&B_z&0&-B_x\\-E_z&-B_y&B_x&0\end{pmatrix} F^{\mu\nu}\begin{pmatrix}0&-E_x&-E_y&-E_z\\E_x&0&-B_z&B_y\\E_y&B_z&0&-B_x\\E_z&-B_y&B_x&0\end{pmatrix}$

$F'_{\mu\nu} = \frac{\partial A'_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A'_\mu}{\partial x^\nu} = \partial_\mu A_\nu + \partial_\mu\partial_\nu\lambda - \partial_\mu\partial_\nu\lambda - \partial_\nu A_\mu = F_{\mu\nu}$

Lorenztransformation/Boot: $A'^\mu(x') = \Lambda^\mu{}_\nu A^\nu$ Boost in x:

$\Lambda^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix}\cosh\eta & -\sinh\eta &&\\ -\sinh\eta & \cosh\eta &&\\ &&1&\\&&&1\end{pmatrix} \quad \tanh\eta = \frac vc \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$

$\cosh\eta = \gamma \quad \sinh\eta = \gamma\frac vc$

$\phi'(x') = [\phi(x) - \frac vc A_x(x)]\cdot\gamma \quad A'_y(x') = A_y(x)$

$A'_x(x') = [A_x(x) - \frac vc\phi(x)]\cdot\gamma \quad A'_z(x') = A_z(x)$

$F'^{\mu\nu}(x') = \Lambda^\mu{}_\rho\Lambda^\nu{}_\kappa F^{\rho\kappa}(x)$

Transforamtion der Felder:

$\vec E'(\vec x') = \gamma\left(\vec E(x) + \frac1c(\vec v\times\vec B(x))\right) - \frac{\gamma^2}{c^2(1+\gamma)}\left(\vec v\cdot\vec E(\vec x)\right)\vec v$

$\vec B'(\vec x') = \gamma\left(\vec B(x) - \frac1c(\vec v\times\vec E(x))\right) - \frac{\gamma^2}{c^2(1+\gamma)}\left(\vec v\cdot\vec B(\vec x)\right)\vec v$

Ort transformieren: $x \to x' \quad x^\mu = (\Lambda^{-1})^\mu_\nu x^\mu$

$\Lambda(\vec v) = \begin{pmatrix}\gamma & -\gamma v_j/c\\ -\gamma v_i/c & 1+\frac{\gamma^2}{c^2(1+\gamma)}v_iv_j\end{pmatrix} \quad \Lambda^{-1}(\vec v) = \Lambda(-\vec v)$

Erhaltungsgrößen: $F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} = 2(\vec B^2 - \vec E^2) =$ invariant

$\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}F^{\mu\nu}F^{\rho\sigma} = -8\vec E\cdot\vec B =$ invariant

Homogene Maxwellgleichungen: $\vec\nabla\cdot\vec B = 0 \quad \vec\nabla\times\vec E = -\frac1c\frac{\partial\vec B}{\partial t}$

Induktionsgesetz und Magnetischer Fluss: $\Psi_A = \int_A d\vec\sigma\cdot\vec B$

$-\frac1c\frac{d\Psi_A}{dt} = \int_A(\vec\nabla\times\vec E) = \oint_{\partial A}d\vec x\cdot\vec E = \Delta U$

$-\frac1c\frac{d\Psi_{A(t)}}{dt} = \oint_{C(t)}d\vec x\cdot\left(\vec E + \frac1c\dot{\vec x}\times\vec B\right) = \Delta U$

Kovariante Formulierung der homogenen Maxwellgleichungen:

$\partial_\mu F_{\nu\rho} + \partial_\nu F_{\rho\mu} + \partial_\rho F_{\mu\nu} = 0 \quad \partial_\mu := \frac{\partial}{\partial x^\mu}$

$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ oder: $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\partial_\nu F_{\rho\sigma} = 0$

Wirkung des E-M-Feldes: $S = S_m + S_{mf} + S_f$

freies Teilchen: $S_m = -\sum_{i=0}^N m_i c\int ds_i \quad ds_i = \sqrt{\frac{dx^i}{d\tau_i}\frac{dx_i}{d\tau_i}}d\tau_i$

Teichen-Feld: $S_{mf} = -\sum_{i=0}^N\frac{e_i}{c}\int A_\mu(x_i)dx_i^\mu$

Froderungen an Lagrangedichte für Feld: $S_f = c\int dtd^3x\mathcal L$

$\mathcal L$ ist Lorenzskalar, also alle Indizes abkontrahiert

$\mathcal L$ Eichinvariant, also Abhängig nur von $F_{\mu\nu}$

Bewegungsgleichung soll linear in Feldern sein, also $\mathcal L\sim F^2$

$\Rightarrow F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$ oder $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma}$ 2. ist Totale Viererableitung:

$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma} = \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\partial_\mu A_\nu\partial_\rho A_\sigma = \partial_\mu[\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}A_\nu\partial_\rho A_\sigma]$

Wirkung: $S_f = a\cdot c\int dtd^3xF^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$ a ist Einheitensys. abhängig

$S_f = -\frac{1}{16\pi c}\int dt\int d^3x(\vec E^2 - \vec B^2)$ (in CGS)

Lagrange Dichte: $\mathcal L = -\frac{1}{16\pi c}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} = \frac{1}{8\pi}(\vec E^2 - \vec B^2)$

Stromdichte := $j^\mu := \rho\frac{dx^\mu}{dt} \Rightarrow j^\mu = (j^0,\vec j) = (c\rho, \rho\dot{\vec x})$

Kontinuitäts Gl.: $\dot\rho + \vec\nabla\cdot\vec j = 0$

$0 = \partial_\mu j^\mu = \frac{\partial j^\mu}{\partial x^\mu} = \frac{\partial j^0}{c\partial t} + \frac{\partial j^i}{\partial x^i} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec\nabla\cdot\vec j$

vollständige Wirkung:

$S = -\sum_{i=1}^N\int m_i c\,ds_i - \frac{1}{c^2}\int d^4x(A_\mu j^\mu + \frac{c}{16\pi}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu})$

$\delta S = -\frac1c\int d^4x[\frac1c j^\mu + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial x^\nu}]\delta A_\mu$

Die Variation muss verschwinden, daraus folgt:

Inhomogene Maxwellgleichungen:

$\frac{\partial}{\partial x^\mu}F^{\mu\nu}(x) = \frac{4\pi}{c}j^\nu(x)$

$\underline{\nu = 0:}\ \frac1c\frac{\partial}{\partial t}F^{00} + \frac{\partial}{\partial x^i}F^{i0} = 4\pi\rho \Rightarrow \vec\nabla\vec E = 4\pi\rho$ (CGS)

$F^{00} = 0 \quad F^{i0} = E^i$

$\underline{\nu = 1:}\ \frac1c\frac{\partial}{\partial t}F^{01} + \frac{\partial}{\partial x^i}F^{i1} = \frac{4\pi}{c}j^1$

$F^{01} = -E_x \quad F^{11} = 0 \quad F^{21} = B_z \quad F^{31} = -B_y$

$\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} = \frac1c\frac{\partial}{\partial t}E_x + \frac{4\pi}{c}j_x$

$\Rightarrow \vec\nabla\times\vec B = \frac1c\frac{\partial\vec E}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\vec j(\vec x)$

Energiedichte und Energiestrom des EM Feld:

$\vec E\cdot(\vec\nabla\times\vec B) = \frac1c\vec E\cdot\frac{\partial\vec E}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\vec E\cdot\vec j$

$\vec B\cdot(\vec\nabla\times\vec E) = -\frac1c\vec B\cdot\frac{\partial\vec B}{\partial t}$

Gleichungen subtrahieren:

$\frac1c\vec E\cdot\frac{\partial\vec E}{\partial t} + \frac1c\vec B\cdot\frac{\partial\vec B}{\partial t} = -\frac{4\pi}{c}\vec E\cdot\vec j - [\vec B(\vec\nabla\times\vec E) - \vec E(\vec\nabla\times\vec B)]$

$[\vec B(\vec\nabla\times\vec E) - \vec E(\vec\nabla\times\vec B)] = \vec\nabla(\vec E\times\vec B)$

$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{8\pi}(\vec E^2+\vec B^2)\right) + \vec\nabla(\frac{c}{4\pi}\vec E\times\vec B) = -\vec j\cdot\vec E$

Pointing Vektor/Energiestromdichte: $\vec S := \frac{c}{4\pi}\vec E\times\vec B$

Erhalung: $\frac{\partial}{\partial t}\left(\int dV\frac{\vec E^2+\vec B^2}{8\pi} + \sum_{i=1}^N\frac{mc^2}{\sqrt{1-\dot{\vec x}_i/c^2}}\right) = 0$

Energie des Feld: $W = \frac{\vec E^2+\vec B^2}{8\pi}$ Ekin: $\sum_{i=1}^N\frac{mc^2}{\sqrt{1-\dot{\vec x}_i/c^2}}$

abgestrahlte Leistung: $P_A = \int_A f\vec\sigma\cdot\vec S(\vec x,t)$

Energie-Impuls-Tensor $T^{\mu\nu}$

$T^{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi}\left(F^{\mu\rho}F_\rho{}^\nu + \frac14\eta^{\mu\nu}F_{\rho\kappa}F^{\rho\kappa}\right)$

Erfüllt: $T^\mu{}_\mu = 0$ Erhaltungsgleichung somit:

$\partial_\mu T^{\mu\nu}\frac{1}{4\pi}[\partial_\mu F^{\mu\rho}F_\rho{}^\nu + F^{\mu\rho}\partial_\mu F_\rho{}^\nu + \frac12\eta^{\mu\nu}F_{\rho\kappa}(\partial_\mu F^{\rho\kappa})]$

$\partial_\mu T^{\mu\nu} = \frac1c j_\mu F^{\mu\nu}$

$T^{00} = W = \frac{1}{8\pi}(\vec E^2 + \vec B^2) \quad 4\pi T^{0i} = (\vec E\times\vec B)\cdot\vec e_i$

räumliche Komponenten bilden Spannugnstensor:

$4\pi T^{ij} = -F^{i0}F^{j0} + F^{ik}F^{jk} - \frac12\delta^{ij}(\vec B^2 - \vec E^2)$

$T^{ij} = \frac{1}{4\pi}[-E^iE^j - B^iB^j + \frac12\delta^{ij}(\vec E^2 + \vec B^2)]$

$T^{\mu\nu} = \frac{1}{8\pi}\begin{pmatrix}\vec E^2+\vec B^2 & 2(\vec E\times\vec B)^T\\ 2(\vec E\times\vec B)^T & (\vec E^2+\vec B^2)\mathbb 1 - 2\vec B\vec B^T - 2\vec E\vec E^T\end{pmatrix}$

Elektromagnetische Wellen

Abwesenheit von Ladung und wieder Einheitensystem in SI

$0 = \vec\nabla\times(\vec\nabla\times\vec E + \partial_t\vec B)$

$= \vec\nabla(\vec\nabla\cdot\vec E) - \Delta\vec E + \frac{n^2}{c^2}\partial_t^2\vec E = \left(\frac{n^2}{c^2}\partial_t^2 - \Delta\right)\vec E = 0$

$\left(\frac{n^2}{c^2}\partial_t^2 - \Delta\right)\vec E = \Box\vec E = 0 \quad \left(\frac{n^2}{c^2}\partial_t^2 - \Delta\right)\vec B = \Box\vec B = 0$

n ist Brechungsindex und hier 1 $\quad n := \sqrt{\epsilon_r\mu_r}$

all. Lösung: $\psi(\vec x,t) = f_+(\vec x\cdot\vec k + \omega t) + f_-(\vec x\cdot\vec k - \omega t)$

$\Box f_\pm(\vec x\cdot\vec k\pm\omega t) = \left(\frac{\omega^2}{c^2} - \vec k^2\right)f''_\pm(\vec x\cdot\vec k\pm\omega t) = 0$

Wellenzahl: $\omega = c|\vec k|$ Phasengeschw.: $\frac{dr_\parallel}{dt} = \frac{\omega}{|\vec k|} = c$

Ebene Welle: $f_\pm(\vec x\cdot\vec k\pm\omega t) = A_\pm e^{i(\vec x\cdot\vec k\pm\omega t)}$

Wellenlänge: $\lambda = \frac{2\pi}{|\vec k|}$

$\psi(\vec x,t) = \sum_{j\in I}\left(A_+^{(j)}e^{i(\vec x\cdot\vec k_j + \omega_j t)} + A_-^{(j)}e^{i(\vec x\cdot\vec k_j - \omega_j t)}\right)$

$\psi(\vec x,t) = \int d^3k[A_+(\vec k)e^{i(\vec k\cdot\vec x+\omega t)} + A_-(\vec k)e^{i(\vec k\cdot\vec x-\omega t)}]$

Forderung an Reelle Lösung: $\psi(\vec x,t) = \psi^*(\vec x,t)$

allgemeine reelle Lösung:

$\psi(\vec x,t) = \int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}[A(\vec k)e^{i(\vec k\cdot\vec x-\omega t)} + A^*(\vec k)e^{-i(\vec k\cdot\vec x-\omega t)}]$

Fourier-Transformation:

$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^\infty dk\tilde f(k)e^{ikx} \quad \tilde f(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^\infty dx\ f(x)e^{-ikx}$

Eigenschaften: $\tilde f(k)$ Fourier-Trafo von $f(x)$

Linearität: $g(x) = a_1f_1(x) + a_2f_2(x)$

$\Rightarrow \tilde g(k) = a_1\tilde f_1(k) + a_2\tilde f_2(k)$

$f(x) = f_1(x)f_2(x) \quad \tilde f(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^\infty dk'\ \tilde f_1(k')\tilde f_2(k-k')$

ist f gerade/ungerade so ist $\tilde f$ auch gerade/ungerade

Trafo mit konvergenzerzeugenden Faktor:

$\tilde f(k) = \lim_{\epsilon\to0^+}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^\infty dx\ f(x)e^{-ikx-\epsilon x^2}$

$f(k) = \lim_{\tilde\epsilon\to0^+}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^\infty dx\ \tilde f(x)e^{-ikx-\tilde\epsilon x^2}$

$f(x) = c \quad \tilde f(k) = c\sqrt{2\pi}\delta(k) \quad \delta(k) = \int_{-\infty}^\infty\frac{dx}{2\pi}e^{-ikx}$

Ableitung: $f(x) \to \tilde f(k) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(x) \to -ik\tilde f(k)$

$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^\infty d\omega\tilde f(\omega)e^{-i\omega t} \quad \tilde f(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^\infty dt\ f(t)e^{i\omega t}$

$f(\vec x,t) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int d^3k\int_{-\infty}^\infty d\omega\tilde f(\vec k,\omega)e^{-i(\vec k\vec x-\omega t)}$

$\tilde f(\vec k,\omega) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int d^3x\int_{-\infty}^\infty dt f(\vec x,t)e^{i(\vec k\vec x-\omega t)}$

Monochromatische Wellen:

$\vec E = \text{Re}[\vec E_0 e^{i(\vec k\vec x-\omega t)}] \quad \vec B = \text{Re}[\vec B_0 e^{i(\vec k'\vec x-\omega' t)}]$

$\vec\nabla\times\vec E = -\partial_t\vec B \Rightarrow i(\vec k\times\vec E_0)e^{i(\vec k\vec x-\omega t)} = i\omega'\vec B_0 e^{i(\vec k'\vec x-\omega t)}$

$\omega' = \omega \quad \vec k' = \vec k \quad \vec\nabla\cdot\vec E = 0 \Rightarrow \vec k\cdot\vec E_0 = 0$

$\vec\nabla\cdot\vec B = 0 \Rightarrow \vec k\cdot\vec B_0 = 0$

$\vec\nabla\times\vec B = \frac{1}{c^2}\partial_t\vec E \Rightarrow \vec k\times\vec B_0 = -\frac{\omega}{c^2}\vec E_0$

$\vec b = \vec b_1 + i\vec b_2 \quad \vec b_1\cdot\vec b_2 = 0 \quad \vec b_1\perp\vec b_2 \quad \vec b_1\parallel\vec e_x \quad \vec k\parallel\vec e_z$

$\vec E = \text{Re}[(\vec b_1 + i\vec b_2)e^{i(\vec k\vec x-\omega t-\alpha)}] = \begin{pmatrix}|\vec b_1|\cos(\omega t+\alpha-\vec k\cdot\vec x)\\ \pm|\vec b_2|\sin(\omega t+\alpha-\vec k\cdot\vec x)\\0\end{pmatrix}$

E erfüllt Ellipsengleichung: $\frac{E_x^2}{b_1^2} + \frac{E_y^2}{b_2^2} = 1$

Zirkular polarisiert: $b_1 = |b_2|$

linear polarisiert: $b_1 = 0$ oder $b_2 = 0$

Vierervektor: $k^\mu = (\frac\omega c,\vec k) \quad k_\mu x^\mu = \omega t - \vec k\cdot\vec x \quad k_\mu k^\mu = 0$

$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0 \Rightarrow \Box A^\nu - \partial^\nu(\partial_\mu A^\mu) = 0$

so Eichung, auf Raumkomponenten reduzieren: $A^0 = 0 \quad \phi = 0$

dann: $\Box\vec A = -\vec\nabla(\vec\nabla\cdot\vec A) \quad \partial_t\vec\nabla\cdot\vec A = 0$

Axial-Eichung: $\vec\nabla\vec A' = 0$ mit $\vec A' = \vec A + \vec\nabla\vec A$

$\vec\nabla\vec A' = \vec\nabla\vec A + \Delta\Lambda \Rightarrow \Delta\Lambda(\vec x) = -\vec\nabla\vec A(\vec x)$

$\Box\vec A = 0 \Rightarrow \eta^{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x^\mu}\frac{\partial}{\partial x^\nu}\vec A = 0$

Lösung: $\vec A = \vec A_0 e^{-ik_\mu x^\mu}$ Monochromatische Welle

Aus Eichung folgt: $\vec\nabla\vec A = 0 \Rightarrow \vec k\vec A = 0$

Realteil: $\vec E = |\vec k|\text{Re}[\vec A] \quad \vec B = \vec k\times\text{Re}[\vec B]$

Energie Impuls: $T^{00} = \frac{1}{8\pi}(\vec E^2+\vec B^2) = W \quad T^{0i} = \frac{1}{4\pi}(\vec E\times\vec N)\cdot\vec e_i$

$T^{ij} = \frac{1}{4\pi}(-E^iE^j - B^iB^j) + \delta^{ij}W$

Koordinatensystem: $\vec k = k\vec e_z \quad \vec E\parallel\vec e_x \quad \vec B\parallel\vec e_z\times\vec e_x = \vec e_y$

Damit folgt, alle Komponenten von T sind 0 außer:

$T^{00} = \frac{1}{4\pi}k^2\text{Re}[A]^2 = W \quad T^{03} = W \quad T^{33} = W$

$T^{\mu\nu} = \frac{Wc^2}{\omega^2}k^\mu k^\nu$

Dopplereffekt: Beobachter mit v im Winkel α zur Welle

$k^\mu = \left(\frac\omega c,\vec k\right) \quad \vec v = v\vec e_x \quad k^\mu = (\frac\omega c, -\sin\alpha\frac\omega c, \cos\alpha\frac\omega c, 0)$

$k'^\mu = \Lambda^\mu{}_\mu k^\nu \quad k'^\mu = \frac{\omega'}{c} = \cosh\eta\frac\omega c + \sinh\eta\sin\alpha\frac\omega c$

$\omega' = \omega\frac{1+v/c\sin\alpha}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$

Transformation der Wellen in Wellenpackete im Fourierraum:

$\vec E(\vec x,t) = \frac{1}{(2\pi)^2}\text{Re}\int d^3k\ \tilde{\vec E}(\vec k,\omega)e^{-i(\vec k\vec x-\omega t)}$

$\vec k\cdot\tilde{\vec E} = 0 \quad \omega = |\vec k|u \quad u = \frac cn$ n Brechungsindex

Fouriertrafo Maxwellgl.:

$\begin{matrix}\vec\nabla\times\vec B - \frac{1}{u^2}\partial_t\vec E = 0,\ \vec\nabla\cdot\vec E = 0\\ \vec\nabla\times\vec E + \partial_t\vec B = 0,\ \vec\nabla\cdot\vec B = 0\end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix}\vec k\times\tilde{\vec B} + \frac{\omega}{u^2}\tilde{\vec E} = 0,\ \vec k\cdot\tilde{\vec E} = 0\\ \vec k\times\tilde{\vec E} - \omega\tilde{\vec B} = 0,\ \vec k\cdot\tilde{\vec B} = 0\end{matrix}$

$\vec E(\vec x,t) = \frac{1}{(2\pi)^2}\text{Re}\int d^3k\ \tilde{\vec E}(\vec k,\omega)e^{-i(\vec k\vec x-\omega t)}$

$\vec B(\vec x,t) = \frac{u}{(2\pi)^2}\text{Re}\int d^3k\ \hat k\times\tilde{\vec B}(\vec k,\omega)e^{-i(\vec k\vec x-\omega t)}$

$\omega = |\vec k|u \quad \vec k\cdot\tilde{\vec E} = 0 \quad \hat k = \vec k/|\vec k|$

Kugelwellen in Kugelkoordinaten:

$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} - \Delta\phi = 0 \quad \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} - \frac1r\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\phi) - \frac{1}{r^2}\vec L^2\phi = 0$

$\phi = \frac1r F(t,r)Y_{lm}(\theta,\varphi)$ mit: $\vec L^2 Y_{lm} = l(l+1)Y_{lm}$

$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2F}{\partial t^2} - \frac{\partial^2F}{\partial r^2} + \frac{l(l+1)}{r^2}F = 0$

$l = m = 0 \Rightarrow \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2F}{\partial t^2} - \frac{\partial^2F}{\partial r^2} = 0$

Kugellösungen:

$\vec E = \frac1r[\vec E_+(ct+r) + \vec E_-(ct-r)]$

$\vec B = \frac1r[\vec B_+(ct+r) + \vec B_-(ct-r)]$

Transversale Wellen die mit 1/r an Amplitude abnehmen

Ausbreitung von Wellen in Leitern:

Leitfähigkeit: $\vec j = \sigma\vec E\ \sigma$: Leitfähigkeit

$\vec\nabla\cdot\vec B = 0 \quad \vec\nabla\cdot\vec E = 0$

$\vec\nabla\times\vec E = -\dot{\vec B}, \quad \vec\nabla\times\vec B = \mu_r\mu_0\sigma\vec E + 1/u^2\ddot{\vec E}$

Telegraphengl.: $\left[\left(\Delta - \frac{1}{u^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) - \mu_r\mu_0\frac{\partial}{\partial t}\right]\vec E(\vec x,t) = 0$

$\left[\left(\Delta - \frac{1}{u^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) - \mu_r\mu_0\frac{\partial}{\partial t}\right]\vec B(\vec x,t) = 0$

$\vec E = \vec E_0(\vec x)e^{-i\omega t} \Rightarrow \left(\Delta + \frac{\omega^2}{c^2}\mu_r\epsilon_r + i\omega\mu_r\mu_0\sigma\right)\vec E_0(\vec x) = 0$

komplexe Dielektrizitätskonst.: $\bar\epsilon_r(\omega)i = \epsilon_r + i\frac{\sigma}{\epsilon_0\omega}$

$\bar u = \frac{c}{\sqrt{\bar\epsilon_r\mu_r}} \Rightarrow \left(\Delta + \frac{\omega^2}{\bar u^2}\right)\vec E_0 = 0$

$\vec E(\vec x,t) = \vec E_0\text{Re}\left[e^{-i(\vec k\vec x-\omega t)}\right] \quad \vec k = \frac{\omega}{\bar u}\hat k$

$\tilde n^2 = \frac12\left[1 + \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\epsilon_0\epsilon_r\omega}\right)^2}\right]$

$\gamma^2 = \frac12\left[-1 + \sqrt{1+\left(\frac{\sigma}{\epsilon_0\epsilon_r\omega}\right)^2}\right]$

$\vec k = \vec e_z: \quad \vec E = \vec E_0\text{Re}[e^{-i\omega(\tilde n/c\,z-t)}]e^{-\gamma\omega z/c}$

Eindringtiefe, Abfall um 1/e: $\delta = \frac{c}{\omega\gamma} = \frac{\lambda_0}{2\pi\gamma}$

Abstrahlung Wellen, in SI und Lorenzeichung:

$\Box A^\mu(x) = \mu_0 j^\mu(x) \Rightarrow \Box G(x,x') = \delta^{(4)}(x-x')$

$\delta^{(4)}(x-x') = \delta(ct-ct')\delta^{(3)}(\vec x-\vec x') = \frac1c\delta(t-t')\delta^{(3)}(\vec x-\vec x')$

$G(x,x') = G(x-x') \quad A^\mu(x) = \mu_0\int d^4x'G(x-x')j^\mu(x')$

$g(x) = \frac{1}{4\pi}\delta(r-ct) \quad r = \sqrt{\vec x^2} \quad x^\mu = (ct,\vec x)$

retadierte Green $G(x-x') = \frac{\theta(t-t')}{4\pi}\frac{1}{|\vec x-\vec x'|}\delta[c(t-t')-|\vec x-\vec x'|]$

$A^\mu(ct,\vec x) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3x'\ \frac{j^\mu(ct-|\vec x-\vec x'|,\vec x')}{|\vec x-\vec x'|}$

$ct_{\text{ret}} = ct - |\vec x-\vec x'| \le ct$ Quelle Ausdehnung: d

$r\gg d$ und $r\gg\lambda$

$\phi(ct,\vec x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac1r\int d^3x'\ \rho(ct-r+\vec e_r\cdot\vec x',\vec x')$

$\vec A(ct,\vec x) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac1r\int d^3x'\ \vec j(ct-r+\vec e_r\cdot\vec x',\vec x')$

$\vec B = -\frac1c\vec e_r\times\dot{\vec A} \quad \dot{\vec E} = c^2\vec\nabla\times\vec B$

$\vec E = \vec e_r\times(\vec e_r\times\dot{\vec A}) = -c\vec e_r\times\vec B \quad \vec E\perp\vec B\perp\vec e_r$

$\vec A(ct,\vec x) = \sqrt{\frac\pi2}\frac{\mu_0}{r}e^{i\omega(t-r/c)}\tilde{\vec j}(\frac\omega c\vec e_r)$

$\vec A(ct,\vec x) = \frac{\mu_0}{4\pi r}\int d^3x'\ \vec j(ct-r,\vec x) +$ Dipol

$\frac{\mu_0}{4\pi cr}\int d^3x'(\vec e_r\cdot\vec x')\partial_t\vec j(ct-r,\vec x')$ Quadrupol

$\vec A_1(ct,\vec x) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac1r\dot{\vec p}(ct-r)$

Abgestrahlte Lesitung: $\vec S = \frac{1}{\mu_0}(\vec E\times\vec B)$

$\vec S = \frac{c}{\mu_0}|\vec B|^2\vec e_r = \frac{1}{\mu_0 c}|\vec E|^2 = \epsilon_0 c|\vec E|^2\vec e_r$

$\frac{dP}{d\Omega} = r^2\vec S\vec e_r = c\epsilon_0 r^2|\vec E|^2 = \frac{c}{\mu_0}r^2|\vec B|^2$

$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{dP_{el}}{d\Omega} + \frac{dP_{mag}}{d\Omega} + \frac{\mu_0}{8\pi^2c^2}\vec e_r\cdot(\ddot{\vec p}\times\ddot{\vec m})$

$P_{el.Dipol} = \frac{\mu_0}{6\pi c}\ddot{\vec p}^2 \quad P_{mag.Dipol} = \frac{\mu_0}{6\pi c^3}\ddot{\vec m}^2$

Lienard-Wiechert Potentiale, bewegte Ladung:

$\rho(\vec x,t) = q\delta^{(3)}\left(\vec x - \vec R(t)\right) \quad \vec j(\vec x,t) = q\dot{\vec R}(t)\delta^{(3)}\left(\vec x-\vec R(t)\right)$

$A^\mu(\vec x,t) = \frac{\mu_0 qc}{4\pi}\int dt'\frac{\delta(c(t-t')-|\vec x-\vec R(t')|)}{|\vec x-\vec R(t')|}v^\mu(t')$

$f(t') = ct - ct' - r(t') \quad r(t') = |\vec x - \vec R(t')|$

$\frac{df(t')}{dt'} = -c - \frac{dr(t')}{dt'} \quad \frac{dr(t')}{dt'} = -\frac{(\vec x-\vec R(t'))\cdot\dot{\vec R}(t')}{|\vec x-\vec R(t')|}$

$\vec n(t') = \frac{\vec x-\vec R(t')}{|\vec x-\vec R(t')|} \quad \dot f(t') = -c[1-\vec n(t')\vec\beta(t')] \quad \vec\beta(t) = \frac1c\dot{\vec R}(t)$

$ct_{ret} = ct - r(t_{ret})$

$A^\mu(\vec x,t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{qv^\mu(t_{ret})}{r(t_{ret})[1-\vec n(t_{ret})\vec\beta(t_{ret})]}$

$\phi(\vec x,t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r(t_{ret})[1-\vec n(t_{ret})\vec\beta(t_{ret})]}$

$\vec A(\vec x,t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\vec\beta(t_{ret})}{r(t_{ret})[1-\vec n(t_{ret})\vec\beta(t_{ret})]}$

$\frac{\partial t_{ret}}{\partial t} = 1 - \frac{\partial r(t_{ret})}{\partial t} = 1 + \vec n(t_{ret})\vec\beta(t_{ret})\frac{\partial t_{ret}}{\partial t}$

$\frac{\partial r(t_{ret})}{\partial x^i} = c\frac{\partial t_{ret}}{\partial x^i}$

Gleichförmig Bewegetes Teilchen: $(t_{ret}-t)^2 = \frac{1}{c^2}(\vec x - \vec vt_{ret})^2$

$ct_{ret} = \frac\gamma c[x\cdot u\pm\sqrt{(x\cdot u)^2 - c^2x^2}]$ u vierer geschw.

$A^\mu(\vec x,t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{qu^\mu}{\sqrt{(u\cdot x)^2/c^2 - x^2}} \quad u^\mu = (\gamma c,\gamma\vec v)$

$\vec E(\vec x,t) = \frac{q\gamma}{4\pi\epsilon_0}\frac{\vec x-\vec vt}{[(u\cdot x)^2/c^2-x^2]^{3/2}}$

$\vec B(\vec x,t) = \frac{\mu_0 q\gamma}{4\pi}\frac{\vec v\times\vec x}{[(u\cdot x)^2/c^2-x^2]^{3/2}}$

Schwingendes Teilchen: $\vec R = d\sin(\omega t)\vec e_z \quad \vec\beta = kd\cos(\omega t)\vec e_z$

$r = |\vec x|\gg d \quad t_{ret}\approx t - r/c \quad r(t_{ret}) = r(1-\frac{z}{r^2}z_r)$

$\int_\gamma f(\vec x)\, ds = \int f(\vec\gamma(t))\,||\dot{\vec\gamma}||\,dt \quad \int_\gamma \vec f(\vec x)\, d\vec x = \int \vec f(\vec\gamma(t))\,\dot{\vec\gamma}\,dt$

$\iint_F f(\vec x)\,d\sigma = \iint_F f(\vec\varphi(u,v))\cdot||\vec\varphi_u\times\vec\varphi_v||\,d(u,v)$

$\iint_F \vec f(\vec x)\,d\vec\sigma = \iint_F \vec f(\vec\varphi(u,v))\cdot(\vec\varphi_u\times\vec\varphi_v)\,d(u,v)$

$\iiint_V f(\vec x)\,dV = \iiint_V \vec f(\vec\xi(u,v,w))\left(\frac{\partial\vec\xi}{\partial u}\times\frac{\partial\vec\xi}{\partial v}\right)\cdot\frac{\partial\vec\xi}{\partial w}$

Zylinderkoor. $grad\phi = \vec e_r\frac{\partial\phi}{\partial r} + \vec e_z\frac{\partial\phi}{\partial z} + \vec e_\varphi\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\varphi}$

$\vec\nabla\vec F = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rF_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial F_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \quad | \quad rot\vec F = \left[\frac{1}{r}\frac{\partial F_z}{\partial\varphi} - \frac{\partial F_\varphi}{\partial z}\right]\vec e_r + \left[\frac{\partial F_r}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial r}\right]\vec e_\varphi + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rF_\varphi) - \frac{\partial F_r}{\partial\varphi}\right]\vec e_z$

$\Delta\phi = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}$

Kugel koor. $grad\phi = \vec e_r\frac{\partial\phi}{\partial r} + \vec e_\theta\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta} + \vec e_\varphi\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\phi}{\partial\varphi}$

$div\vec F = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2F_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(F_\theta\sin\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial F_\varphi}{\partial\varphi}$

$rot\vec F = \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}(F_\varphi\sin\theta) - \frac{\partial F_\theta}{\partial\varphi}\right]\vec e_r + \left[\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial F_r}{\partial\varphi} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rF_\varphi)\right]\vec e_\theta + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rF_\theta) - \frac{\partial F_r}{\partial\theta}\right]\vec e_\varphi$

$\Delta\phi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2}$

Gauß: $\int_V dV\, div\vec F = \int_{\partial V}\vec F\,d\vec\sigma$ | Stokes $\int_f d\vec f\, rot\vec F = \oint_{\partial F}\vec F\,d\vec x$

Green: 1. $\int_V dV(\varphi\Delta\psi + (\vec\nabla\varphi)(\vec\nabla\psi)) = \oint_{\partial V}\varphi\frac{\partial\psi}{\partial n}d\sigma$

Green: 2. $\int_V dV(\varphi\Delta\psi - \psi\Delta\varphi) = \oint_{\partial V}d\sigma\left(\varphi\frac{\partial\psi}{\partial n} - \psi\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)$

$\frac{\partial\psi}{\partial n} = \vec\nabla\psi\vec n \quad \int_{\vec a}^{\vec b}\vec\nabla f = f(\vec b) - f(\vec a)$

$g_{ij} = \frac{\partial\vec x}{\partial u_i}\times\frac{\partial\vec x}{\partial u_j} \quad g_i = \sqrt{g_{ii}} \quad \Delta V = g_u g_v g_w\Delta u\Delta v\Delta w$

$\vec e_i = \frac{\partial\vec x}{\partial u_i}/\left|\frac{\partial\vec x}{\partial u_i}\right| \quad (ds)^2 = (\Delta\vec x)^2 = g_{ij}\Delta u_i\Delta u_j$

$grad\varphi = \frac{1}{g_u}\frac{\partial\varphi}{\partial u}\vec e_u + \frac{1}{g_v}\frac{\partial\varphi}{\partial v}\vec e_v + \frac{1}{g_w}\frac{\partial\varphi}{\partial w}\vec e_w$

$div\vec A = \frac{\left[\frac{\partial(g_vg_wA_u)}{\partial u} + \frac{\partial(g_ug_wA_v)}{\partial v} + \frac{\partial(g_vg_uA_w)}{\partial w}\right]}{g_ug_vg_w}$

$rot\vec A = \begin{vmatrix}\frac{\vec e_u}{g_vg_w} & \frac{\vec e_v}{g_ug_w} & \frac{\vec e_w}{g_ug_v}\\ \frac{\partial}{\partial u} & \frac{\partial}{\partial v} & \frac{\partial}{\partial w}\\ g_uA_u & g_vA_v & g_wA_w\end{vmatrix}$

$\Delta\varphi = \frac{\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{g_vg_w\partial\varphi}{g_u\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{g_ug_w\partial\varphi}{g_v\partial v}\right) + \frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{g_ug_v\partial\varphi}{g_w\partial w}\right)\right]}{g_ug_vg_w}$

$\vec A(\vec B\times\vec C) = \vec B(\vec C\times\vec A) = \vec C(\vec A\times\vec B)$

$\vec A\times(\vec B\times\vec C) = \vec B(\vec A\cdot\vec C) - \vec C(\vec A\cdot\vec B)$

$\vec a\times\vec b = \epsilon_{ijk}a_ib_j\vec e_k \quad \vec a\cdot\vec b = \delta_{ij}a_ib_j\vec e_i$

$\vec\nabla(fg) = f(\vec\nabla g) + g(\vec\nabla f)$ | $\vec\nabla(\lambda\vec A) = \lambda(\vec\nabla A) + \vec A(\vec\nabla\lambda)$

$\vec\nabla(\vec A\vec B) = \vec A\times(\vec\nabla\times\vec B) + \vec B\times(\vec\nabla\times\vec A) + (\vec A\vec\nabla)\vec B + (\vec B\vec\nabla)\vec A$

$\vec\nabla(\vec A\times\vec B) = \vec B(\vec\nabla\times\vec A) - \vec A(\vec\nabla\times\vec B)$

$\vec\nabla\times(f\vec A) = f(\vec\nabla\times\vec A) - \vec A\times(\vec\nabla f)$ $rot(\lambda\vec A)$!!

$\vec\nabla\times(\vec A\times\vec B) = (\vec B\vec\nabla)\vec A - (\vec A\vec\nabla)\vec B + \vec A(\vec\nabla\vec B) - \vec B(\vec\nabla\vec A)$

$\vec\nabla(\vec\nabla\times\vec A) = 0 \quad \vec\nabla\times(\vec\nabla f) = 0$

$\vec\nabla\times(\vec\nabla\times\vec A) = \vec\nabla(\vec\nabla\vec A) - \vec\nabla^2\vec A$

$\frac{d\vec A}{dt} = (\dot{\vec x}\vec\nabla)\vec A + \frac{\partial\vec A}{\partial t}$

$\delta(x) = \lim_{\epsilon\to0}\frac{1}{\pi}\frac{\epsilon}{x^2+\epsilon^2} \quad \Delta\frac{1}{|\vec x|} = -4\pi\delta(\vec x)$

$\delta[g(x)]] = \sum_n\frac{1}{|g'(x_n)|}\delta(x - x_n)$

[illegible] |x-ort
$\vec A\times\vec B = -\vec A\times\vec B$

$\int\int\delta(x-y)\,dx\,dx = \int\theta(x-y)\,dx = \theta(x-y)(x-y) + c_1x + c_2$

Taylor-Entwicklung Felder

$\frac{1}{|\vec r-\vec r'|} = \sum_{n=0}^\infty\frac{1}{n!}(\vec r'\vec\nabla_{\hat r})^n\frac{1}{|\vec r-\hat r|}\Big|_{\hat r=0}$

$\frac{\alpha}{|\vec r-\vec r'|} = \alpha\left[\frac{1}{|\vec r'|} + \frac{\vec r\vec r'}{|\vec r'|^3} + \frac{1}{2}\frac{3(\vec r\vec r')^2 - \vec r^2\vec r'^2}{\vec r'^5}\right]$

$|\vec r-\vec r'| = \sqrt{|\vec r-\vec r'|^2} = \sqrt{|r|^2 + |r'|^2 - 2|\vec r||\vec r'|\cos\theta}$

$\sin(x) = \sum(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \cos(x) = \sum(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}$

$\sin(x) = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix}) \quad \cos(x) = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})$

$\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = -i\sin(ix)$

$\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \cos(ix) \quad (e^{i\varphi})^* = e^{-i\varphi}$

$e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x) \quad |x\vec e_x \pm y\vec e_y| = |y\vec e_x \pm x\vec e_y|$

$\sin(\alpha\pm\beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) \pm \cos(\alpha)\sin(\beta)$

$\sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha) \quad (\arcsin(x))' = 1/\sqrt{1-x^2}$

$(\arccos(x))' = -1/\sqrt{1-x^2} \quad (\arctan(x))' = 1/(1+x^2)$

$\int\frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}} = \mathrm{arcsinh}\left(\frac{x}{|a|}\right) = ln\left(|a\sqrt{x^2+a^2} + |a|x|\right)$

$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2}dx = \sqrt{2\pi}$

$\int x\cos(x)\,dx = x\sin(x) + \cos(x)$

$\int\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}^3} = \frac{x}{a^3\sqrt{x^2/a^2+1}}$

$\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}$

$\int\sqrt{a^2+x^2}\,dx = \frac{a^2}{2}\mathrm{arcsinh}\frac{x}{a} + \frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2}$

$\int\arcsin(x)\,dx = x\arcsin(x) + \sqrt{1-x^2}$

$\int\arccos(x)\,dx = x\arccos(x) - \sqrt{1-x^2}$

$\int\arctan(x)\,dx = x\arctan(x) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$

$\int\mathrm{arccot}(x)\,dx = x\,\mathrm{arccot}(x) + \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$

$\int\sin^n(x)dx = \frac{n-1}{n}\int\sin^{n-2}(x)dx - \frac{1}{n}\cos(x)\sin^{n-1}(x)$

$\int\cos^n(x)dx = \frac{n-1}{n}\int\cos^{n-2}(x)dx + \frac{1}{n}\sin(x)\cos^{n-1}(x)$

Lagrange 1. $m\ddot{\vec x} = \vec K + \lambda\vec\nabla\varphi(\vec x,t)$

Ekin $\frac{1}{2}m(r^2[\dot\theta^2 + \dot\varphi^2\sin\theta] + \dot r^2)$ $\frac{1}{2}m(\dot r^2 + r^2\dot\varphi^2 + \dot z^2)$

$L = T(q,\dot q,t) - V(q,t) \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot q} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$

Zentralfeld; $V_{eff} = V(r) + \frac{1}{2}\frac{L^2}{mr^2}$

kleinste Wirkung $S = \int_{t_1}^{t_2}L(q_i,\dot q_i)dt$

$\mathcal H(q,p,t) := \left\{\sum_{i=1}^n\dot q_ip_i\right\} - \mathcal L(q,\dot q,t)$, mit $\dot q = \dot q(q,p,t)$

$\frac{\partial\mathcal H}{\partial p_i} = \dot q_i \quad \frac{\partial\mathcal H}{\partial q_i} = -\frac{\partial\mathcal L}{\partial q_i} = -\dot p_i$ Bewegungsgelichungen

$\dot q_k = \frac{\partial\mathcal H}{\partial p_k} \quad \dot p_k = -\frac{\partial\mathcal H}{\partial q_k}$ Hamiltonfunk. erhalten

$F_1(q,Q) = F \quad p_i = \frac{\partial F_1}{\partial q_i}, P_i = -\frac{\partial F_1}{\partial Q_i}$

$F_2(q,P) = F + \sum_i Q_iP_i \quad p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i}, Q_i = \frac{\partial F_2}{\partial P_i}$

$F_3(p,Q) = F - \sum_i q_ip_i \quad q_i = -\frac{\partial F_3}{\partial p_i}, P_i = -\frac{\partial F_3}{\partial Q_i}$

$F_4(p,P) = F + \sum_i(Q_iP_i - q_ip_i) \quad q_i = -\frac{\partial F_4}{\partial p_i}, Q_i = \frac{\partial F_4}{\partial P_i}$

SI! **Elektrostatik** $Q = \int_V d^3x\rho(\vec x) \quad I = \int_F\vec j d\vec\sigma$

$\vec F = \frac{q\cdot q'}{4\pi\epsilon_0}\frac{(\vec x-\vec x')}{|\vec x-\vec x'|^3} \quad \vec F(\vec r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\int\rho(\vec r')\frac{(\vec r-\vec r')}{|\vec r-\vec r'|^3}d\vec r'$

$\vec E(\vec x) = \sum_{i=1}^N\frac{q_i(\vec x-\vec x_i)}{4\pi\epsilon_0|\vec x-\vec x_i|^3} \quad \boxed{\vec E(\vec x) = \int d^3y\frac{\rho(\vec y)(\vec x-\vec y)}{4\pi\epsilon_0|\vec x-\vec y|^3}}$

$\boxed{\vec\nabla\vec E = \frac{\rho}{\epsilon_0}} \quad \vec E = -\vec\nabla\phi \quad \vec\nabla\times\vec E = 0 \quad \oint\vec E d\vec x = 0$

$-\vec\nabla^2\phi = \frac{\rho(\vec x)}{\epsilon_0} \quad \phi = \int d^3y\frac{\rho(\vec y)}{4\pi\epsilon_0|\vec x-\vec y|} \quad W = \frac{\epsilon_0}{2}\int d^3x|\vec E|^2$

$W = \frac{1}{8\pi\epsilon_0}\sum_{j\neq i=1}^n\frac{q_iq_j}{|\vec r_i-\vec r_j|} \quad V_{Dipol} = -\vec p\vec E(\vec x)$

Kond.: $U = \frac{xQ}{\epsilon_0A} \quad W = \frac{\epsilon_0A}{2}\int_0^d\frac{Q^2}{\epsilon^2A^2}dx = \frac{1}{2}CU^2 \quad C = \frac{Q}{U}$

Dipol: $\phi(\vec x) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{|\vec x-\frac{d}{2}\vec n|} - \frac{1}{|\vec x+\frac{d}{2}\vec n|}\right)$

$\phi(\vec x) = \frac{\vec p\vec x}{4\pi\epsilon_0|\vec x|^3} = -\vec p\vec\nabla\frac{1}{4\pi\epsilon_0|\vec x|}$

$\vec p = qd\vec n \quad \vec F_{dipol} = (\vec p\vec\nabla)\vec E \quad \vec M_{dipol} = \vec p\times\vec E$

Monopol/Dipol-/Quadrupolmoment: $q = \int d^3x'\rho(\vec x')$

$\vec p = \int d^3\vec x'(\vec x'\rho(\vec x')) \quad Q_{ij} = \int d^3\vec x'(\rho(\vec x')(3x'_ix'_j - \vec x'^2\delta_{ij})$

$4\pi\epsilon_0\phi(\vec x) \overset{R\ll|\vec x|}{\approx} \frac{q}{|\vec x|} + \frac{\vec x\vec p}{|\vec x|^3} + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^3Q_{ij}\frac{x_ix_j}{|\vec x|^5} + \ldots$

Randwertproblem: $\phi_1\,\phi_2$ sein Lösungen $\psi = \phi_1 - \phi_2$

auf ∂V bekannt: Dirichlet: $\phi \Rightarrow \psi = 0$

Neumann: $\vec n\vec\nabla\psi = \frac{\partial\psi}{\partial n} \Rightarrow \vec n\vec\nabla\psi = 0$

$\int_V(\vec\nabla\psi)(\vec\nabla\psi) = \oint_{\partial V}\psi\vec n\vec\nabla\psi d\sigma - \int_V\psi\Delta\psi dV \Rightarrow$ Eindeutig

$\phi(\vec x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V dx'\frac{\rho(\vec x')}{|\vec x-\vec x'|}$:Potential mit Randwert:

$+ \frac{1}{4\pi}\int_{\partial V}df\left(\frac{1}{|\vec x-\vec x'|}\frac{\partial\phi}{\partial n'} - \phi(\vec x')\frac{\partial}{\partial n'}\frac{1}{|\vec x-\vec x'|}\right)$

$\Delta_xG(\vec x,\vec x') = -\delta^{(3)}(\vec x-\vec x') \quad G(\vec x,\vec x') = \frac{1}{4\pi}\frac{1}{|\vec x-\vec x'|} + f(\vec x,\vec x')$

Dirichlet: $\phi(\vec x')|_{\partial V} = \omega(\vec x')$ wähle $f(\vec x,\vec x')$ so, dass :

$\oint_{\partial V}df'G_D(\vec x,\vec x')\frac{\partial\psi}{\partial n'}$ wähle: $G_D(\vec x,\vec x') = 0\ \vec x'\in\partial V,\ \vec x\in V$

$\phi(\vec x) = \frac{1}{\epsilon_0}\int_V d^3x'\rho(\vec x')G_D(\vec x,\vec x') - \oint_{\partial V}df'\omega(\vec x')\frac{\partial G_D(\vec x,\vec x')}{\partial n'}$

Neumann: $-\frac{\partial\phi}{\partial n}\Big|_{\partial V} = E_\perp = \nu(\vec x)$ wähle $f(\vec x,\vec x')$ so, dass :

$\oint_{\partial V}df'\phi(\vec x')\frac{G_N(\vec x,\vec x')}{\partial n'} = -\phi_0$ fordern: $\frac{\partial G_D}{\partial n'} = -\frac{1}{|\partial V|}$

$\phi(\vec x) = \frac{1}{\epsilon_0}\int_V d^3x'\rho(\vec x')G_N(\vec x,\vec x') - \oint_{\partial V}df'G_N(\vec x,\vec x')\nu(\vec x)$

Green Funktion: Halbebene: $H = \{\vec x\in R^3; x_3 > 0\}y_3 = -y_{S3}$

$G_D = \frac{1}{4\pi}\frac{1}{|\vec x-\vec y|} - \frac{1}{4\pi}\frac{1}{|\vec x-\vec y_S|} \quad G_N = \frac{1}{4\pi}\frac{1}{|\vec x-\vec y|} + \frac{1}{4\pi}\frac{1}{|\vec x-\vec y_S|}$

auß. Kugel: $\vec y_I = \frac{R^2}{|\vec y|}\vec y \quad G_D = \frac{1}{4\pi|\vec x-\vec y|} - \frac{R/|\vec y|}{4\pi|\vec x-(R^2/|\vec y|^2)\vec y|}$

$G_N = \frac{1}{4\pi|\vec x-\vec y|} + \frac{R}{4\pi|\vec y||\vec x-\vec y_I|} + \frac{1}{4\pi R}\log\frac{|\vec y||\vec x-\vec y_I| + \vec y(\vec x-\vec y_I)}{|\vec x||\vec y| + \vec x\cdot\vec y}$

Induzierte Ladungen: $\sigma_{ind} = \epsilon_0\vec E\cdot\vec n \quad q = \int_{\partial V}df\sigma$

Separationsansatz: $\Delta\phi = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\phi = 0$

z.B. $\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\phi_{xy}(x,y) = \lambda\phi_{xy} \quad \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\phi_z(z) = -\lambda\phi_z$

Sep. Kugelkoor.: $\phi = R(r)\cdot Y(\theta,\varphi) \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2}\vec L^2$

$\vec L^2 := \left(\frac{\partial}{\partial\theta}\right)^2 + \cot\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\left(\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)^2 \quad L_z = -i\frac{\partial}{\partial\varphi}$

Eigenwertproblem: $\vec L^2f(\theta,\varphi) = \lambda\cdot f(\theta,\varphi) \quad f(\theta,\varphi) = g(\theta)\cdot h(\varphi)$

$h_m(\varphi) = e^{im\varphi}$, erfüllt $L_zh_m(\varphi) = mh_m(\varphi)\ 0\le m\le l\in N$

$\left[-\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\right)^2 - \cot\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{m^2}{\sin^2\theta} - \lambda\right]g_m(\theta) = 0 \quad u = \cos(\theta)$

$\left[(u^2-1)\left(\frac{\partial}{\partial u}\right)^2 + 2u\frac{\partial}{\partial u} - \frac{m^2}{u^2-1} - \lambda\right]P(u) = 0 \quad \lambda = l(l+1)$

$\left[(u^2-1)\left(\frac{\partial}{\partial u}\right)^2 + 2u\frac{\partial}{\partial u} - \lambda\right]P(u) = 0 \quad m = 0$

$\int_{-1}^1du\,u^kP_l(u) = 0$ für alle $0\le k<l$

$\int_{-1}^1du\,P_n(u)P_m(u) = 0 \quad n\neq m \quad P_l(u) = \frac{1}{2^ll!}\left(\frac{d}{du}\right)^l(u^2-1)^l$

Normierung: $\int_{-1}^1du\,P_n(u)^2 = \frac{2}{2l+1}$

Allg. Fall: $P_l^m(u) = \frac{(-1)^m}{2^ll!}(1-u^2)^{m/2}\left(\frac{d}{du}\right)^{l+m}(u^2-1)^l$

Orthogonalität: $\int_{-1}^1du\,P_l^mP_{l'}^m = \delta_{l,l'}\frac{(l+m)!}{(l-m)!}$

Legendre Polynome P_l^m: $P_0^0 = 1 \quad P_1^0 = x \quad P_1^1 = -\sqrt{1-x^2}$

$P_2^0 = \frac{1}{2}(3x^2-1) \quad P_2^1 = -3x\sqrt{1-x^2} \quad P_2^2 = 3(1-x^2)$

Kugelflächenfunktionen, erfüllen Eigenwertgleichungen:

$\boxed{Y_{l,m}(\theta,\varphi) = \sqrt{(2l+1)\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}P_l^m(\cos\theta)e^{im\varphi}}$

$\vec L^2Y_{l,m} = l(l+1)Y_{l,m} \quad L_zY_{l,m} = mY_{l,m}$

für jedes l gibt $(2l+1)$ Eigenwerte: $m = -l, -l+1, \ldots, l-1, l$

$Y_{0,0} = 1 \quad Y_{1,0} = \sqrt3\cos\theta = \sqrt3\frac{z}{r}$

$Y_{1,\pm1} = \mp\sqrt{3/2}\sin\theta e^{\pm i\varphi} = \mp\sqrt{3/2}\frac{x\pm iy}{r}$

$Y_{2,0} = \sqrt{5/4}(3\cos^2\theta - 1) = \sqrt{5/4}\frac{2z^2-x^2-y^2}{r^2}$

$Y_{2,\pm1} = -\sqrt{15/2}\sin\theta\cos\theta e^{\pm i\varphi} = -\sqrt{15/2}\frac{z(x\pm iy)}{r^2}$

$Y_{2,\pm2} = \sqrt{15/8}\sin^2\theta e^{\pm i2\varphi} = \sqrt{15/8}\frac{(x\pm iy)^2}{r^2}$

Orthogonaltiät:

$\int_a^bdx\,U_n^*(x)U_m(x) = \delta_{nm} \quad \sum_{n=1}^\infty U_n^*(y)U_n^*(x) = \delta(x-y)$

$F(\theta,\varphi) = \sum_{l=0}^\infty\sum_{m=-l}^lY_{l,m}(\theta,\varphi)c_{l,m}$

$c_{l,m} = \frac{1}{4\pi}\int d\theta d\varphi\sin\theta Y_{l,m}^*(\theta,\varphi)F(\theta,\varphi)$

$\phi(r,\theta,\varphi) = \sum_{l=0}^\infty\sum_{m=-l}^lR_{l,m}(r)Y_{l.m}(\theta,\varphi)$

Radial-Lösung: $R_{lm}(r) = r^\alpha \Rightarrow a = l$ und $\alpha = -l-1$

$0 = \left[\left(\frac{d}{dr}\right)^2 + \frac{2}{r}\frac{d}{dr} - \frac{l(l+1)}{r^2}\right]r^\alpha = r^{\alpha-2}[\alpha^2 - \alpha + 2a - l(l+1)]$

Damit folgt: $R_{lm}(r) = A_{lm}r^l + B_{lm}r^{-(l+1)}$

$\phi(r,\theta,\varphi) = \sum_{l=0}^\infty\sum_{m=-l}^l\left(A_{lm}r^l + B_{lm}r^{-(l+1)}\right)Y_{l,m}(\theta,\varphi)$

Symmetrie in φ: $m = 0$

$\Rightarrow \phi(r,\theta))\sum_{l=0}^\infty\sqrt{2l+1}[A_lr^l + B_lr^{-l-1}]P_l(\cos\theta)$

geladene Kugeloberfläche $\sigma(\theta) = \sum_{l=0}^\infty\sqrt{2l+1}\sigma_lP_l(\cos\theta)$

$\sigma_l = \frac{1}{2}\int_{-1}^1d(\cos\theta)\sigma(\theta)P_l(\cos\theta)$

falls $\phi\to0$ für $r\to\infty \Rightarrow A_{lm} = 0$

Multipolentwicklung in Kugelkoordinaten: $\phi\to0$ für $r\to\infty$

$\phi(r,\theta,\varphi) = \sum_{l,m}\frac{q_{lm}}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{(2l+1)r^{l+1}}Y_{l,m}(\theta,\varphi)$

$B_{lm} = \frac{q_{lm}}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{(2l+1)}\int d^2\Omega dr\,r^{l+2}Y_{l,m}^*(\theta,\varphi)\rho(r,\theta,\varphi) := Q_{lm}$

Additionstheorem: γ winkel zwischen $\vec x, \vec x'$

$\frac{4\pi}{2l+1}\sum_{m=-l}^lY_{l,m}(\theta,\varphi)Y_{l,m}^*(\theta',\varphi') = P_l(\cos\gamma)$

$\int_0^{2\pi}e^{i\varphi(n-m)}d\varphi = \delta_{nm}$

Magnetostatik $\vec M = \vec m\times\vec B$ $\vec m$ magnetischer Dipol

$\vec j(\vec x,t) = \rho(\vec x,t)\vec v(\vec x,t)$ Stromdichte $I = \int_Fd\vec f\cdot\vec j = dQ/dt$

$\frac{dQ}{dt} = -\int_Vd^3x\vec\nabla\cdot\vec j = -\int_{\partial V}d\vec f\cdot\vec j(\vec x,t)$

oder über: $\vec\nabla\cdot(\vec\nabla\times\vec B)$

Kontinuitätsgl.: $\boxed{\frac{\partial\rho(\vec x,t)}{\partial t} + \vec\nabla\cdot\vec j(\vec x,t) = 0}$

Stromfaden: $\vec jd^3x \to Id\vec x \Rightarrow \int_Vd^3x\vec j(\vec x) = \int_Cd\vec xI$

Ampere'sche Gesetz: $\vec F_{12} = \frac{\mu_0I_1I_2}{4\pi}\oint_{C_1}\oint_{C_2}\frac{d\vec x_1\times(d\vec x_2\times\vec x_{12})}{|\vec x_{12}|^3}$

$\vec x_{12} = \vec x_1 - \vec x_2 \quad I_i = const. \quad \mu_0 = 4\pi\cdot10^{-7}\frac{kg\,m}{A^2s^2} \quad \epsilon_0\mu_0 = \frac{1}{c^2}$

$d\vec x_1\times(d\vec x_2\times\vec x_{12}) = d\vec x_2(d\vec x_1\cdot\vec x_{12}) - \vec x_{12}d\vec x_1\cdot d\vec x_2$

1.Term 0 Beitrag: $\vec F_{12} = \frac{\mu_0I_1I_2}{4\pi}\oint_{C_1}\oint_{C_2}(d\vec x_1\cdot d\vec x_2)\frac{\vec x_{12}}{|\vec x_{12}|^3}$

Biot-Savart: $\boxed{\vec B(\vec x) = \mu_0I\oint_C\frac{d\vec y\times(\vec x-\vec y)}{4\pi|\vec x-\vec y|^3}}$

auf Leiterschl.: $\vec F = I\oint_Cd\vec x\times\vec B(\vec x)$

auf Leiterschl.: $\vec M = I\oint_C\vec x\times(d\vec x\times\vec B(\vec x))$

für Stromdichte: $\vec B(\vec x) = \mu_0\int d^3y\frac{\vec j(\vec y)\times(\vec x-\vec y)}{4\pi|\vec x-\vec y|^3}$

$\vec\nabla_x\times\frac{\vec j(\vec y)}{|\vec x-\vec y|} = \frac{1}{|\vec x-\vec y|}\vec\nabla_x\times\vec j - \vec j\times\vec\nabla_x\frac{1}{|\vec x-\vec y|} = \vec j\times\frac{\vec x-\vec y}{|\vec x-\vec y|^3}$

$\vec\nabla_x\times\vec j(\vec y) = 0 \Rightarrow \vec B(\vec x) = \vec\nabla_x\times\frac{\mu_0}{4\pi}d^3y\frac{\vec j(\vec y)}{|\vec x-\vec y|}$

Homogene Maxwellgleichung:

$\boxed{\vec\nabla_x\cdot\vec B = 0} \Rightarrow 0 = \int_Vd^3x\vec\nabla\cdot\vec B(\vec x) = \oint_{\partial V}d\vec\sigma\vec B(\vec x)$ Inhomogene Maxwellegleichung:

$\vec\nabla_x\times\vec B(\vec x) = \vec\nabla_x\times\left(\vec\nabla_x\times\frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3y\frac{\vec j(\vec y)}{|\vec x-\vec y|}\right)$

$\vec\nabla\times(\vec\nabla\times\vec I) = \vec\nabla(\vec\nabla\cdot\vec I) - \Delta\vec I \quad \vec I(\vec x) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3y\frac{\vec j(\vec y)}{|\vec x-\vec y|}$

verwenden: $\vec\nabla_y\vec j(\vec y) = -\frac{\partial\rho(\vec y)}{\partial t} = 0$, $\vec j(\vec y) = 0$ im Unendlichen

$\vec\nabla_x\vec I(\vec x) \overset{P.I.}{=} \frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3y[\vec\nabla_y\cdot\vec j(\vec y)]\frac{1}{|\vec x-\vec y|} - \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{\partial 0\to\infty}d\vec\sigma\frac{\vec j(\vec y)}{|\vec x-\vec y|}$

$\vec\nabla_x\times\vec B(\vec x) = -\Delta_x\frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3y\frac{\vec j(\vec y)}{|\vec x-\vec y|} \Rightarrow \vec\nabla_x\times\vec B(\vec x) = \mu_0\vec j(\vec x)$

Ampersche Durchflutung: $\int_Dd\vec\sigma\cdot(\vec\nabla\times\vec B) = \oint_{\partial D}d\vec x\cdot\vec B = \mu_0I$

Vektorpotential: $\vec B(\vec x) = \vec\nabla\times\vec A(\vec x)\ \vec A(\vec x) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3y\frac{\vec j(\vec y)}{|\vec x-\vec y|}$

Gotta

Catch them all

Eichtransformationen: $\vec A'(\vec x) = \vec A(\vec x) + \vec\nabla\Lambda(\vec x)$

Coulomb-Eichung: $\vec\nabla\cdot\vec A(\vec x) = 0$ Axiale Eichung: $\vec n\cdot\vec A(\vec x) = 0$

$\vec\nabla\times(\vec\nabla\times\vec A) = -\Delta\vec A + \vec\nabla(\vec\nabla\cdot\vec A) \Rightarrow \Delta\vec A(\vec x) = -\mu_0\vec j(\vec x)$

$\vec F = \int d^3x\vec j(\vec x)\times\vec B(\vec x) \quad \vec M = \int d^3x\vec x\times\left(\vec j(\vec x)\times\vec B(\vec x)\right)$

$\int d^3x\vec j(\vec x) = \int d^3x(\vec j\cdot\vec\nabla)\vec x \overset{P.I}{=} -\int d^3x(\vec\nabla\vec j)\vec x = 0 \quad \vec\nabla\vec j = 0$

Konstantes B-Feld: $\vec m := \frac{1}{2}\int d^3y\vec y\times\vec j(\vec y) \quad \vec M = \vec m\times\vec B_0$

Fernfeld: $\vec A(\vec x) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec m\times\vec x}{|\vec x|^3} + \ldots$

Elektro- und Magnetostatik in ~~Materie~~: Schmutz

ρ_{frei} induziert ρ_{Dipol} in Materie $\vec P(\vec x)$ Dipoldichte

$\vec P(\vec x) = \epsilon_0\gamma\vec E + \mathcal O(\vec E^2) \quad \gamma = \chi_l$ Diel. Suszeptibilität

$\rho_{ges} = \rho_{frei} - \vec\nabla\cdot\vec P = \rho_{frei} + \rho_{dipol} \quad \vec D(\vec x) = \epsilon_0\vec E(\vec x) + \vec P(\vec x)$

$\vec\nabla\vec D(\vec x) = \rho_{frei}(\vec x) \quad \vec D(\vec x) = \epsilon\vec E(\vec x)$ mit: $\epsilon = \epsilon_0\epsilon_r \quad \epsilon_r = 1 + \chi_l$

Übergang zwischen Medien: $\epsilon_r, \vec E, \vec D\ /\ \epsilon'_r, \vec E', \vec D'$

Gauss'sches Kästchen: $Q = \int_{\partial V}d\vec\sigma\cdot\vec D \approx A\vec n\cdot(\vec D - \vec D')$

$\vec n\cdot(\vec D - \vec D') = \sigma$ σ ist Ladung der Grenzflächen, meist 0

Stokes'sche Fläche: $= \oint_Cd\vec x\cdot\vec E \approx \vec L\cdot(\vec E - \vec E') \quad \vec t(\vec E - \vec E') = 0$

$\boxed{D_\perp = D'_\perp \Leftrightarrow E_\perp = \frac{\epsilon'}{\epsilon}E'_\perp \quad E_\parallel = E'_\parallel \Leftrightarrow D_\parallel = \frac{\epsilon}{\epsilon'}D'_\parallel}$

Magnetisierung: $\vec B(\vec x) = \mu_0(\vec H(\vec x) + \vec M(\vec x)) \quad M = \chi_m\cdot H$

$\mu_r = 1 + \chi_m \Rightarrow \vec B(\vec x) = \mu\vec H(\vec x)\ \vec\nabla\times\vec H(\vec x) = \vec j_{frei}(\vec x)\ \vec\nabla\cdot\vec B = 0$

$\oint_{\partial A}d\vec x\cdot\vec H = I_{frei,A} \quad \int_{\partial V}d\vec\sigma\cdot\vec B = 0$

Übergang zwischen Medien: $\mu_r, \vec B, \vec H\ /\ \mu'_r, \vec B', \vec H'$

$\boxed{B_\perp = B'_\perp \Leftrightarrow H_\perp = \frac{\mu'_r}{\mu_r}H'_\perp}$ $(\vec e_t\times\vec e_n)\cdot(\vec H - \vec H') = \vec j_{frei}\cdot\vec e_t$

$\boxed{H_\parallel = H'_\parallel \Leftrightarrow B_\parallel = \frac{\mu_r}{\mu'_r}B'_\parallel}$ Diamagnetismus $\chi_m < 0\ |\chi_m|$ klein

Paramagentismus $\chi_m > 0$ Antiferromag. exakte Auslöschung

Randwertprobleme: $\vec x\times\vec H \Rightarrow \vec H = -\vec\nabla\phi_m$ magn. Protential ← kein strom

$\Delta\phi_m = \vec\nabla\vec M(\vec x) \quad \phi_m(\vec x) = -\frac{1}{4\pi}\int d^3y\frac{\vec\nabla_y\vec M(\vec y)}{|\vec x-\vec y|}$

Trick: $\frac{\vec\nabla_y\vec M(\vec y)}{|\vec x-\vec y|} = \vec\nabla_y\left(\frac{\vec M(\vec y)}{|\vec x-\vec y|}\right) - \vec M(\vec y)\cdot\vec\nabla_y\left(\frac{1}{|\vec x-\vec y|}\right)$

$\vec\nabla_y\left(\frac{1}{|\vec x-\vec y|}\right) = -\vec\nabla_x\left(\frac{1}{|\vec x-\vec y|}\right) \Rightarrow \phi_m(\vec x) = -\frac{1}{4\pi}\vec\nabla_x\int d^3y\frac{\vec M(\vec y)}{|\vec x-\vec y|}$

Fernf. $\phi_m \approx \frac{1}{4\pi}\frac{\vec x\cdot\vec M_{tot}}{|\vec x|^3} \Rightarrow \vec H \approx \frac{1}{4\pi}\left[\frac{3(\vec x\cdot\vec M_{tot})\vec x}{|\vec x|^5} - \frac{\vec M_{tot}}{|\vec x|^3}\right]$ ↑SI

↓CGS

Relativistische Formulierung elektromagnetsiche Felder

$x^\mu = (ct,x,y,z)\ \mu = 0,1,2,3\ x^0 = ct,\ x^i = \vec e_i\cdot\vec x$

$x_\mu = \eta_{\mu\nu}x^\nu = (ct,-\vec x) \quad \eta_{\mu\nu}diag(1,-1,-1,-1)$

$(ds)^2 = c^2(dt)^2 - (d\vec x)^2 \quad ds = \sqrt{\dot x^\mu\dot x_\mu}d\tau \quad \dot x^\mu\frac{dx^\mu}{d\tau}$

Wirkung: $S_m = -mc\int_a^bds = -mc\int_a^bd\tau\sqrt{\dot x^\mu\dot x_\mu}$

Wirkung: $S_m = -mc^2\int_{t_1}^{t_2}dt\sqrt{1-\frac{\dot{\vec x}^2}{c^2}}$

Poincaré-Trafo: $x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu + \alpha^\mu$ mit $\Lambda^\mu{}_\rho\eta_{\mu\nu}\Lambda^\nu{}_\kappa = \eta_{\rho\kappa}$

$\frac{\partial L}{\partial x^i} = 0 \quad \frac{\partial L}{\partial\dot x^i} = \frac{m\dot x^i}{\sqrt{1-\frac{\dot{\vec x}^2}{c^2}}} = p^i \quad \frac{\partial L}{\partial x^i} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot x^i} \Rightarrow \frac{d}{dt}p^i = 0$

Vierer Vektor: $x^\mu = (ct,x,y,z)^T = (ct,\vec x)^T$

Lorenz-Transformation: $x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$

Kontravariant: $A'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu A^\nu$ Kovariant: $A'_\mu = \Lambda_\mu{}^\nu A_\nu$

$\Lambda_\mu{}^\nu := \eta_{\mu\rho}\Lambda^\rho{}_\kappa\eta^{\kappa\nu} = (\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu\ |A^\mu = (A^0,\vec A)\ A_\mu = (A^0,-\vec A)$

$A\cdot B := A^\mu B_\mu = \eta_{\mu\nu}A^\mu$

$B^\nu = A^0B^0 - \vec A\cdot\vec B$

Tesor 2.Stufe: $F^{\mu\nu}$ 3.Stufe: $\Lambda^{\mu\nu\rho}$ n.Stufe $\Lambda^{\mu_1\cdots\mu_n}$

$F'^{\mu\nu} = \Lambda^\mu{}_\rho\Lambda^\nu{}_\kappa F^{\rho\kappa} \quad \Lambda'^{\mu\nu\rho} = \Lambda^\mu{}_\alpha\Lambda^\nu{}_\beta\Lambda^\rho{}_\gamma\Lambda^{\alpha\beta\gamma}$

Metrik hebt/senkt: $F_\mu{}^\nu = \eta_{\mu\kappa}F^{\kappa\nu} \quad F_{\mu\nu} = \eta_{\mu\kappa}\eta_{\nu\rho}F^{\kappa\rho}$

$F_{00} = F^{00} \quad F_{0i} = -F^{0i} \quad F_{ij} = F^{ij}$

$F_0{}^0 = F^{00} \quad F_0{}^i = F^{0i} \quad F^0{}_i = -F^{0i} \quad F_i{}^j = -F^{ij}$

$\eta^{\mu\nu} = diag(1,-1,-1,-1) \quad \eta_{\mu\nu} = diag(1,-1,-1,-1)$

$\delta^\mu_\nu = diag(1,1,1,1) \quad \delta^\mu_\nu = \eta^{\mu\rho}\eta_{\rho\nu} \quad \delta^\mu_\nu\eta^{\nu\rho} = \eta_{\mu\rho}$

$\epsilon^{\mu\nu\rho\kappa}\epsilon_{\mu\nu\rho\kappa} = -24 \quad \epsilon^{\mu\alpha\beta\gamma}\epsilon_{\nu\alpha\beta\gamma} = -6\delta^\mu_\nu$

$\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\epsilon_{\rho\kappa\alpha\beta} = -2(\delta^\mu_\rho\delta^\nu_\kappa - \delta^\mu_\kappa\delta^\nu_\rho)$

$\epsilon^{\mu\nu\rho\alpha}\epsilon_{\kappa\sigma\delta\alpha} = -\begin{vmatrix} \delta^\mu_\kappa & \delta^\mu_\sigma & \delta^\mu_\delta \\ \delta^\nu_\kappa & \delta^\nu_\sigma & \delta^\nu_\delta \\ \delta^\rho_\kappa & \delta^\rho_\sigma & \delta^\rho_\delta \end{vmatrix}$

$\partial_\mu\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x^\mu} = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t}, \vec\nabla\varphi\right) \quad \partial^\mu\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x_\mu} = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t}, -\vec\nabla\varphi\right)$

$Div(A) = \partial\cdot A = \frac{\partial}{\partial x^\mu}A^\mu = \frac{1}{c}\frac{\partial A^0}{\partial t} + \vec\nabla\vec A = \partial_\mu A^\mu = \partial^\mu A_\mu$

Viererpotential: $A^\mu = (\phi, \vec A(\vec x)) \quad A_\mu = (\phi, -\vec A)$

allg. Wirkung: $S_{mf} = -\frac{e}{c}\int_a^b A_\mu(x)dx^\mu$

gelad. Teilchen: $S = \int_{t_1}^{t_2}\left(-mc^2\sqrt{1-\frac{\dot x^2}{c^2}} + \frac{e}{c}\vec A\cdot\dot{\vec x} - e\phi\right)dt$

Lagrange: $L(\vec x, \dot{\vec x}, t) = -mc^2\sqrt{1-\frac{\dot x^2}{c^2}} + \frac{e}{c}\vec A\cdot\dot{\vec x} - e\phi$

$\vec p = \vec p_{mech} + \frac{e}{c}A^i(\vec x, t) \Rightarrow \vec p_{mech} = \frac{m\dot x^i}{\sqrt{1-\frac{\dot x^2}{c^2}}}$

$H = c\sqrt{m^2c^2 + \left(\vec p - \frac{e}{c}\vec A\right)^2} + e\phi$

relativistische Bewegungsgleichung:

$\frac{d\vec p_{mech}}{dt} = -e\vec\nabla\phi - \frac{e}{c}\frac{\partial\vec A}{\partial t} + \frac{e}{c}\dot{\vec x}\times(\vec\nabla\times\vec A)$

$\vec E = -\vec\nabla\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec A}{\partial t} \quad \vec F_m = e\dot{\vec x}\times\vec B \quad \vec B = \mathrm{rot}\vec A$

$\frac{d\vec p_{mech}}{dt} = e\vec E + \frac{e}{c}\dot{\vec x}\times\vec B \quad \frac{\dot x^2}{c^2} \ll 1 \Rightarrow m\ddot{\vec x} = e\vec E + \frac{e}{c}\dot{\vec x}\times\vec B$

Eichinvarianz: $A'_\mu(\vec x, t) = A_\mu(\vec x, t) - \frac{\partial\Lambda(\vec x, t)}{\partial x^\mu}$

$\vec A' = \vec A + \vec\nabla\Lambda \Rightarrow \vec B' = \vec\nabla\times\vec A' + \vec\nabla\times\vec\nabla\Lambda = \vec B$

$\phi' = \phi - \frac{1}{c}\frac{\partial\Lambda}{\partial t} \Rightarrow \vec E' = -\vec\nabla\phi' - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec A'}{\partial t} =$

$-\vec\nabla\phi - \frac{1}{c}\vec\nabla\frac{\partial\Lambda}{\partial t} + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec A}{\partial t} + \frac{1}{c}\vec\nabla\frac{\partial\Lambda}{\partial t} = \vec E$

Kleinste Wirkung: $\delta S = \delta\int_a^b\left(-mc\,ds - \frac{e}{c}A_\mu dx^\mu\right) = 0$

Feldstärketensor: $F_{\mu\nu} := \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu}$ $u_\nu = (\gamma c, \gamma\vec v)\ \partial_\mu x^\mu$

Bewegungsgleichung 4erGeschwindigkeit: $\boxed{mc\frac{du^\mu}{d\tau} = \frac{e}{c}F^{\mu\nu}u_\nu}$

$F_{0i} = -\partial_i\phi + \frac{1}{c}\partial_t A_i = E_i$ mit $\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = (\partial/c\,\partial_t, -\vec\nabla)$

$F_{ij} = \partial_i A_j - \partial_j A_i \quad F_{12} = \partial_2 A^1 - \partial_1 A^2 = -B_z$

$F_{\mu\nu}\begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} F^{\mu\nu}\begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$

$F'_{\mu\nu} = \frac{\partial A'_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A'_\mu}{\partial x^\nu} = \partial_\mu A_\nu + \partial_\mu\partial_\nu\lambda - \partial_\nu\partial_\mu\lambda - \partial_\nu A_\mu = F_{\mu\nu}$

Lorenztransformation/Boost: $A'^\mu(x') = \Lambda^\mu{}_\nu A^\nu$ Boost in x:

$\Lambda^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} \cosh\eta & -\sinh\eta & & \\ -\sinh\eta & \cosh\eta & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \quad \tanh\eta = \frac{v}{c} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$

$\cosh\eta = \gamma \quad \sinh\eta = \gamma\frac{v}{c}$

$\phi'(x') = [\phi(x) - \frac{v}{c}A_x(x)]\cdot\gamma \quad A'_y(x') = A_y(x)$

$A'_x(x') = [A_x(x) - \frac{v}{c}\phi(x)]\cdot\gamma \quad A'_z(x') = A_z(x)$

$F'^{\mu\nu}(x') = \Lambda^\mu{}_\rho\Lambda^\nu{}_\kappa F^{\rho\kappa}(x)$

Transforamtion der Felder:

$\vec E'(\vec x') = \gamma\left(\vec E(x) + \frac{1}{c}(\vec v\times\vec B(x))\right) - \frac{\gamma^2}{c^2(1+\gamma)}\left(\vec v\cdot\vec E(x)\right)\vec v$

$\vec B'(\vec x') = \gamma\left(\vec B(x) - \frac{1}{c}(\vec v\times\vec E(x))\right) - \frac{\gamma^2}{c^2(1+\gamma)}\left(\vec v\cdot\vec B(x)\right)\vec v$

Ort transformieren: $x \to x' \quad x'^\mu = (\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu x^\nu$

$\Lambda(\vec v) = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma v_j/c \\ -\gamma v_i/c & 1 + \frac{\gamma^2}{c^2(1+\gamma)}v_i v_j \end{pmatrix} \quad \Lambda^{-1}(\vec v) = \Lambda(-\vec v)$

Erhaltungsgrößen: $F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} = 2(\vec B^2 - \vec E^2)$ = invariant

$\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}F^{\mu\nu}F^{\rho\sigma} = -8\vec E\cdot\vec B$ = invariant

Homogene Maxwellgleichungen: $\vec\nabla\cdot\vec B = 0 \quad \vec\nabla\times\vec E = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec B}{\partial t}$

Induktionsgesetz und Magnetischer Fluss: $\Psi_A = \int_A d\vec a\cdot\vec B$

$-\frac{1}{c}\frac{d\Psi_A}{dt} = \int_A(\vec\nabla\times\vec E) = \oint_{\partial A}d\vec s\cdot\vec E = \Delta U$

$-\frac{1}{c}\frac{d\Psi_{A(t)}}{dt} = \oint_{C(t)}d\vec s\cdot\left(\vec E + \frac{1}{c}\dot{\vec x}\times\vec B\right) = \Delta U$

Kovariante Formulierung der homogenen Maxwellgleichungen:

$\boxed{\partial_\mu F_{\nu\rho} + \partial_\nu F_{\rho\mu} + \partial_\rho F_{\mu\nu} = 0} \quad \partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}$

$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ oder: $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\partial_\nu F_{\rho\sigma} = 0$

Wirkung des E-M-Feldes: $S = S_m + S_{mf} + S_f$

freies Teilchen: $S_m = -\sum_{i=1}^N m_i c\int ds_i \quad ds_i = \sqrt{\frac{dx_i^i}{d\tau_i}\frac{dx_i}{d\tau_i}}d\tau_i$

Teichen-Feld: $S_{mf} = -\sum_{i=0}^N\frac{e_i}{c}\int A_\mu(x_i)dx_i^\mu$

Froderungen an Lagrangedichte für Feld: $S_f = c\int dt d^3x\mathcal{L}$

$\mathcal{L}$ ist Lorenzskalar, also alle Indizes abkontrahiert

$\mathcal{L}$ Eichinvariant, also Abhängig nur von $F_{\mu\nu}$

Bewegungsgleichung soll linear in Feldern sein, also $\mathcal{L}\sim F^2$

$\Rightarrow F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$ oder $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma}$ 2. Ist Totale Vererabileitung:

$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma} = \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\partial_\mu A_\nu\partial_\rho A_\sigma = \partial_\mu[\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}A_\nu\partial_\rho A_\sigma]$

Wirkung: $S_f = a\cdot c\int dt d^3x F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$ a ist Einheitensys. abhängig

$S_f = -\frac{1}{16\pi c}\int dt\int d^3x(\vec E^2 - \vec B^2)$ (in CGS)

Lagrange Dichte: $\mathcal{L} = -\frac{1}{16\pi c}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} = \frac{1}{8\pi}(\vec E^2 - \vec B^2)$

Stromdichte $:= j^\mu := \rho\frac{dx^\mu}{dt} \Rightarrow j^\mu = (j^0, \vec j) = (c\rho, \rho\vec x)$

Kontinuitäts Gl.: $\dot\rho + \vec\nabla\cdot\vec j = 0$

$\boxed{0 = \partial_\mu j^\mu} = \frac{\partial j^\mu}{\partial x^\mu} = \frac{\partial j^0}{c\partial t} + \frac{\partial j^i}{\partial x^i} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec\nabla\cdot\vec j$

vollständige Wirkung:

$S = -\sum_{i=1}^N\int m_i c\,ds_i - \frac{1}{c^2}\int d^4x\left(A_\mu j^\mu + \frac{c}{16\pi}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\right)$

$\delta S = -\frac{1}{c}\int d^4x\left[\frac{1}{c}j^\mu + \frac{1}{4\pi}\partial_\nu F^{\nu\mu}\right]\delta A_\mu$

Die Variation muss verschwinden, daraus folgt:

Inhomogene Maxwellgleichungen:

$\boxed{\frac{\partial}{\partial x^\mu}F^{\mu\nu}(x) = \frac{4\pi}{c}j^\nu(x)}$

$\nu = 0$: $\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}F^{00} + \frac{\partial}{\partial x^i}F^{i0} = 4\pi\rho \Rightarrow \boxed{\vec\nabla\vec E = 4\pi\rho}$ (CGS)

$F^{00} = 0 \quad F^{i0} = E^i$

$\nu = 1$: $\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}F^{01} + \frac{\partial}{\partial x^i}F^{i1} = \frac{4\pi}{c}j^1$

$F^{01} = -E_x \quad F^{11} = 0 \quad F^{21} = B_z \quad F^{31} = -B_y$

$\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}E_x + \frac{4\pi}{c}j_x$

$\Rightarrow \boxed{\vec\nabla\times\vec B = \frac{1}{c}\frac{\partial\vec E}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\vec j(x)}$

Energiedichte und Energiestrom des EM Feld:

$\vec E\cdot(\vec\nabla\times\vec B) = \frac{1}{c}\vec E\cdot\frac{\partial\vec E}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\vec E\cdot\vec j$

$\vec B\cdot(\vec\nabla\times\vec E) = -\frac{1}{c}\vec B\cdot\frac{\partial\vec B}{\partial t}$

Gleichungen subtrahieren:

$\frac{1}{c}\vec E\cdot\frac{\partial\vec E}{\partial t} + \frac{1}{c}\vec B\cdot\frac{\partial\vec B}{\partial t} = -\frac{4\pi}{c}\vec E\cdot\vec j - [\vec B(\vec\nabla\times\vec E) - \vec E(\vec\nabla\times\vec B)]$

Lorentz: $\ddot x_i = \dot{x}^i \times \vec B \ldots$ $d\tau = \frac{1}{\gamma}dt$

$[\vec B(\vec\nabla\times\vec E) - \vec E(\vec\nabla\times\vec B)] = \vec\nabla(\vec E\times\vec B)$

$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{8\pi}(\vec E^2 + \vec B^2)\right) + \vec\nabla\left(\frac{c}{4\pi}\vec E\times\vec B\right) = -\vec j\cdot\vec E$

Pointing Vektor/Energiestromdichte: $\boxed{\vec S := \frac{c}{4\pi}\vec E\times\vec B}$

Erhalung: $\frac{\partial}{\partial t}\left(\int dV\frac{\vec E^2 + \vec B^2}{8\pi} + \sum_{i=1}^N\frac{mc^2}{\sqrt{1-\dot x_i/c^2}}\right) = 0$

Energie des Feld: $\boxed{W = \frac{\vec E^2 + \vec B^2}{8\pi}}$ Ekin: $\sum_{i=1}^N\frac{mc^2}{\sqrt{1-\dot x_i/c^2}}$

abgestrahlte Leistung: $P_A = \int_A f\vec\sigma\cdot\vec S(\vec x, t)$

Energie-Impuls-Tensor $T^{\mu\nu}$

$T^{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi}\left(F^{\mu\rho}F_\rho{}^\nu + \frac{1}{4}\eta^{\mu\nu}F_{\rho\kappa}F^{\rho\kappa}\right)$

Erfüllt: $T^\mu{}_\mu = 0$ Erhaltungsgleichung somit:

$\partial_\mu T^{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi}[\partial_\mu F^{\mu\rho}F_\rho{}^\nu + F^{\mu\rho}\partial_\mu F_\rho{}^\nu + \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}F_{\rho\kappa}(\partial_\mu F^{\rho\kappa})]$

$\partial_\mu T^{\mu\nu} = \frac{1}{c}j_\mu F^{\mu\nu}$

$T^{00} = W = \frac{1}{8\pi}(\vec E^2 + \vec B^2) \quad 4\pi T^{0i} = (\vec E\times\vec B)\cdot\vec e_i$

räumliche Komponenten bilden Spannungstensor:

$4\pi T^{ij} = -F^{i0}F^{j0} + F^{ik}F^{jk} - \frac{1}{2}\delta^{ij}(\vec B^2 - \vec E^2)$

$T^{ij} = \frac{1}{4\pi}[-E^iE^j - B^iB^j + \frac{1}{2}\delta^{ij}(\vec E^2 + \vec B^2)]$

$T^{\mu\nu} = \frac{1}{8\pi}\begin{pmatrix} \vec E^2 + \vec B^2 & 2(\vec E\times\vec B)^T \\ 2(\vec E\times\vec B)^T & (\vec E^2 + \vec B^2)\mathbb{1} - 2\vec B\vec B^T - 2\vec E\vec E^T \end{pmatrix}$ CGS $\uparrow\downarrow$ SI

Elektromagnetische Wellen

Abwesenheit von Ladung und wieder Einheitensystem in SI

$0 = \vec\nabla\times(\vec\nabla\times\vec E + \partial_t\vec B)$

$= \vec\nabla(\vec\nabla\cdot\vec E) - \Delta\vec E + \frac{n^2}{c^2}\partial_t^2\vec E = \left(\frac{n^2}{c^2}\partial_t^2 - \Delta\right)\vec E = 0$

$\boxed{\left(\frac{n^2}{c^2}\partial_t^2 - \Delta\right)\vec E = \Box\vec E = 0} \quad \left(\frac{n^2}{c^2}\partial_t^2 - \Delta\right)\vec B = \Box\vec B = 0$

n ist Brechungsindex und hier 1 $\quad n := \sqrt{\epsilon_r\mu_r}$

all. Lösung: $\psi(\vec x, t) = f_+(\vec x\cdot\vec k + \omega t) + f_-(\vec x\cdot\vec k - \omega t)$

$\Box f_\pm(\vec x\cdot\vec k\pm\omega t) = \left(\frac{\omega^2}{c^2} - \vec k^2\right)f''_\pm(\vec x\cdot\vec k\pm\omega t) = 0$

Wellenzahl: $\omega = c|\vec k|$ Phasengeschw.: $\frac{dr_\parallel}{dt} = \frac{\omega}{|\vec k|} = c$

Ebene Welle: $f_\pm(\vec x\cdot\vec k\pm\omega t) = A_\pm e^{i(\vec x\cdot\vec k\pm\omega t)}$

Wellenlänge: $\lambda = \frac{2\pi}{|\vec k|}$

$\psi(\vec x, t) = \sum_{j\in I}\left(A_+^{(j)}e^{i(\vec x\cdot\vec k_j + \omega_j t)} + A_-^{(j)}e^{i(\vec x\cdot\vec k_j - \omega_j t)}\right)$

$\psi(\vec x, t) = \int d^3k[A_+(\vec k)e^{i(\vec k\cdot\vec x + \omega t)} + A_-(\vec k)e^{i(\vec k\cdot\vec x - \omega t)}]$

Forderung an Reelle Lösung: $\psi(\vec x, t) = \psi^*(\vec x, t)$

allgemeine reelle Lösung:

$\psi(\vec x, t) = \int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}[A(\vec k)e^{i(\vec k\cdot\vec x - \omega t)} + A^*(\vec k)e^{-i(\vec k\cdot\vec x - \omega t)}]$

Fourier-Transformation:

$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^\infty dk\tilde f(k)e^{ikx} \quad \tilde f(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^\infty dx\,f(x)e^{-ikx}$

Eigenschaften: $\tilde f(k)$ Fourier-Trafo von $f(x)$

Linearität: $g(x) = a_1f_1(x) + a_2f_2(x)$

$\Rightarrow\tilde g(k) = a_1\tilde f_1(k) + a_2\tilde f_2(k)$

$f(x) = f_1(x)f_2(x) \quad \tilde f(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^\infty dk'\,\tilde f_1(k')\tilde f_2(k-k')$

ist f gerade/ungerade so ist $\tilde f$ auch gerade/ungerade

Trafo mit konvergenzerzeugenden Faktor:

$\tilde f(k) = \lim_{\epsilon\to 0+}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^\infty dx\,f(x)e^{-ikx-\epsilon x^2}$

$f(k) = \lim_{\tilde\epsilon\to 0+}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^\infty dx\,\tilde f(x)e^{-ikx-\tilde\epsilon x^2}$

$f(x) = c \quad \tilde f(k) = c\sqrt{2\pi}\delta(k) \quad \delta(k) = \int_{-\infty}^\infty\frac{dx}{2\pi}e^{-ikx}$

Ableitung: $f(x)\to\tilde f(k)\Rightarrow\frac{\partial f}{\partial x}(x)\to -ik\tilde f(\tilde k)$

$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^\infty d\omega\tilde f(\omega)e^{-i\omega t} \quad \tilde f(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^\infty dt\,f(t)e^{i\omega t}$

$f(\vec x, t) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int d^3k\int_{-\infty}^\infty d\omega\tilde f(\vec k, \omega)e^{-i(\vec k\vec x - \omega t)}$

$\tilde f(\vec k, \omega) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int d^3x\int_{-\infty}^\infty dt\,f(\vec x, t)e^{i(\vec k\vec x - \omega t)}$

Monochromatische Wellen:

$\vec E = \mathrm{Re}[\vec E_0e^{i(\vec k\vec x - \omega t)}] \quad \vec B = \mathrm{Re}[\vec B_0e^{i(\vec k'\vec x - \omega' t)}]$

$\vec\nabla\times\vec E = -\partial_t\vec B \Rightarrow i(\vec k\times\vec E_0)e^{i(\vec k\vec x - \omega t)} = i\omega'\vec B_0e^{i(\vec k'\vec x - \omega t)}$

$\omega' = \omega \quad \vec k' = \vec k \quad \vec\nabla\cdot\vec E = 0 \Rightarrow \vec k\cdot\vec E_0 = 0$

$\vec\nabla\cdot\vec B = 0 \Rightarrow \vec k\cdot\vec B_0 = 0$

$\vec\nabla\times\vec B = \frac{1}{c^2}\partial_t\vec E \Rightarrow \vec k\times\vec B_0 = -\frac{\omega}{c^2}\vec E_0$ $\Big\}$ transversal $\Rightarrow$ Welle

$\vec b = \vec b_1 + i\vec b_2 \quad \vec b_1\cdot\vec b_2 = 0 \quad \vec b_1\perp\vec b_2 \quad \vec b_1\parallel\vec e_x \quad \vec k\parallel\vec e_z$

$\vec E = \mathrm{Re}[(\vec b_1 + i\vec b_2)e^{i(\vec k\vec x - \omega t - \alpha)}] = \begin{pmatrix} |\vec b_1|\cos(\omega t + \alpha - \vec k\cdot\vec x) \\ \pm|\vec b_2|\sin(\omega t + \alpha - \vec k\cdot\vec x) \\ 0 \end{pmatrix}$

E erfüllt Ellipsengleichung: $\frac{E_x^2}{b_1^2} + \frac{E_y^2}{b_2^2} = 1$

Zirkular polarisiert: $b_1 = |b_2|$

linear polarisiert: $b_1 = 0$ oder $b_2 = 0$

Vierervektor: $k^\mu = (\frac{\omega}{c}, \vec k) \quad k_\mu x^\mu = \omega t - \vec k\cdot\vec x \quad k_\mu k^\mu = 0$

$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0 \Rightarrow \Box A^\nu - \partial^\nu(\partial_\mu A^\mu) = 0$

so Eichung, auf Raumkomponenten reduzieren: $A^0 = 0 \quad \phi = 0$

dann: $\Box\vec A = -\vec\nabla(\vec\nabla\cdot\vec A) \quad \partial_t\vec\nabla\cdot\vec A = 0$

Axial-Eichung: $\vec\nabla\vec A' = 0$ mit $\vec A' = \vec A + \vec\nabla\vec A$

$\vec\nabla\vec A' = \vec\nabla\vec A + \Delta\Lambda \Rightarrow \Delta\Lambda(\vec x) = -\vec\nabla\vec A(\vec x)$

$\Box\vec A = 0 \Rightarrow \eta^{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x^\mu}\frac{\partial}{\partial x^\nu}\vec A = 0$

Lösung: $\vec A = \vec A_0e^{-ik_\mu x^\mu}$ Monochromatische Welle

Aus Eichung folgt: $\vec\nabla\vec A = 0 \Rightarrow \vec k\vec A = 0$

Realteil: $\vec E = |\vec k|\mathrm{Re}[\vec A] \quad \vec B = \vec k\times\mathrm{Re}[\vec B]$

Energie Impuls: $T^{00} = \frac{1}{8\pi}(\vec E^2 + \vec B^2) = W \quad T^{0i} = \frac{1}{4\pi}(\vec E\times\vec N)\cdot\vec e_i$

$T^{ij} = \frac{1}{4\pi}(-E^iE^j - B^iB^j) + \delta^{ij}W$

Koordinatensystem: $\vec k = k\vec e_z \quad \vec E\parallel\vec e_x \quad \vec B\parallel\vec e_z\times\vec e_x = \vec e_y$

Damit folgt, alle Komponenten von T sind 0 außer:

$T^{00} = \frac{1}{4\pi}k^2\mathrm{Re}[A]^2 = W \quad T^{03} = W \quad T^{33} = W$

$T^{\mu\nu} = \frac{Wc^2}{\omega^2}k^\mu k^\nu$

Dopplereffekt: Beobachter mit v im Winkel α zur Welle

$k^\mu = \left(\frac{\omega}{c}, \vec k\right) \quad \vec v = v\vec e_x \quad k^\mu = (\frac{\omega}{c}, -\sin\alpha\frac{\omega}{c}, \cos\alpha\frac{\omega}{c}, 0)$

$k'^\mu = \Lambda^\mu{}_\mu k^\nu \quad k'^\mu = \frac{\omega'}{c} = \cosh\eta\frac{\omega}{c} + \sinh\eta\sin\alpha\frac{\omega}{c}$

$\omega' = \omega\frac{1 + v/c\sin\alpha}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$

Transformation der Wellen in Wellenpackete im Fourierraum:

$\vec E(\vec x, t) = \frac{1}{(2\pi)^2}\mathrm{Re}\int d^3k\ \tilde{\vec E}(\vec k, \omega)e^{-i(\vec k\vec x - \omega t)}$

$\vec k\cdot\tilde{\vec E} = 0 \quad \omega = |\vec k|u \quad u = \frac{c}{n}$ n Brechungsindex

Fouriertrafo Maxwellgl.:

$\boxed{\begin{matrix} \vec\nabla\times\vec B - \frac{1}{u^2}\partial_t\vec E = 0,\ \vec\nabla\cdot\vec E = 0 \\ \vec\nabla\times\vec E + \partial_t\vec B = 0,\ \vec\nabla\cdot\vec B = 0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} \vec k\times\vec B + \frac{\omega}{u^2}\tilde{\vec E} = 0,\ \vec k\cdot\tilde{\vec E} = 0 \\ \vec k\times\tilde{\vec E} - \omega\tilde{\vec B} = 0,\ \vec k\cdot\tilde{\vec B} = 0 \end{matrix}}$

$\vec E(\vec x, t) = \frac{1}{(2\pi)^2}\mathrm{Re}\int d^3k\ \tilde{\vec E}(\vec k, \omega)e^{-i(k\vec x - \omega t)}$

$\vec B(\vec x, t) = \frac{u}{(2\pi)^2}\mathrm{Re}\int d^3k\ \hat k\times\tilde{\vec B}(\vec k, \omega)e^{-i(\vec k\vec x - \dot\omega t)}$

$\omega = |\vec k|u \quad \vec\kappa\cdot\tilde{\vec E} = 0 \quad \hat k = \vec k/|\vec k|$

Kugelwellen in Kugelkoordinaten:

$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} - \Delta\phi = 0 \quad \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\phi) - \frac{1}{r^2}\vec L^2\phi = 0$

$\phi = \frac{1}{r}F(t, r)Y_{lm}(\theta, \varphi)$ mit: $\vec L^2Y_{lm} = l(l+1)Y_{lm}$

$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2F}{\partial t^2} - \frac{\partial^2F}{\partial r^2} + \frac{l(l+1)}{r^2}F = 0$

$l = m = 0 \Rightarrow \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2F}{\partial t^2} - \frac{\partial^2F}{\partial r^2} = 0$

Kugellösungen:

$\vec E = \frac{1}{r}[\vec E_+(ct + r) + \vec E_-(ct - r)]$

$\vec B = \frac{1}{r}[\vec B_+(ct + r) + \vec B_-(ct - r)]$

Maxwell Gl. CGS:

$\vec\nabla\cdot\vec D = 4\pi\rho \quad \vec\nabla\times\vec E = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec B$

$\vec\nabla\cdot\vec B = 0 \quad \vec\nabla\times\vec H = \frac{4\pi}{c}\vec j + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec D$

$\vec D = \vec E + 4\pi\vec P \quad \vec H = \vec B - 4\pi\vec M$

Transversale Wellen die mit 1/r an Amplitude abnehmen

Ausbreitung von Wellen in Leitern:

Leitfähigkeit: $\vec j = \sigma\vec E\ \sigma$: Leitfähigkeit

$\vec\nabla\cdot\vec B = 0 \quad \vec\nabla\cdot\vec E = 0$

$\vec\nabla\times\vec E = -\dot{\vec B}, \quad \vec\nabla\times\vec B = \mu_r\mu_0\sigma\vec E + 1/u^2\ddot{\vec E}$

Telegraphengl.: $\left[\left(\Delta - \frac{1}{u^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) - \mu_r\mu_0\frac{\partial}{\partial t}\right]\vec E(\vec x, t) = 0$

$\left[\left(\Delta - \frac{1}{u^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) - \mu_r\mu_0\frac{\partial}{\partial t}\right]\vec B(\vec x, t) = 0$

$\vec E = \vec E_0(\vec x)e^{-i\omega t} \Rightarrow \left(\Delta + \frac{\omega^2}{c^2}\mu_r\epsilon_r + i\omega\mu_r\mu_0\sigma\right)\vec E_0(\vec x) = 0$

SI:

$\vec\nabla\cdot\vec E = \frac{\rho}{\varepsilon}$

$\vec\nabla\times\vec E = -\frac{\partial}{\partial t}\vec B$

$\vec\nabla\times\vec B = \mu\vec j + \mu\varepsilon\frac{\partial\vec E}{\partial t}$

$\vec\nabla\cdot\vec B = 0$

Kovariant SI

$\partial_\mu F_{\nu\rho} + \partial_\nu F_{\rho\mu} + \partial_\rho F_{\mu\nu} = 0$

$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 j^\nu$

komplexe Dielektrizitätskonst.: $\bar\epsilon_r(\omega)i = \epsilon_r + i\frac{\sigma}{\epsilon_0\omega}$

$\bar u = \frac{c}{\sqrt{\bar\epsilon_r\mu_r}} \Rightarrow \left(\Delta + \frac{\omega^2}{\bar u^2}\right)\vec E_0 = 0$

$\vec E(\vec x, t) = \vec E_0\mathrm{Re}\left[e^{-i(\vec k\vec x - \omega t)}\right] \quad \vec k = \frac{\omega}{u}\hat{\vec k}$

$\tilde n^2 = \frac{1}{2}\left[1 + \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\epsilon_0\epsilon_r\omega}\right)^2}\right]$

$\gamma^2 = \frac{1}{2}\left[-1 + \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\epsilon_0\epsilon_r\omega}\right)^2}\right]$

$\vec k = \vec e_z$: $\quad\vec E = \vec E_0\mathrm{Re}[e^{-i\omega(\tilde n/c\,z - t)}]e^{-\gamma\omega z/c}$

Eindringtiefe, Abfall um 1/e: $\delta = \frac{c}{\omega\gamma} = \frac{\lambda_0}{2\pi\gamma}$

Abstrahlung Wellen, in SI und Lorenzeichung:

$\Box A^\mu(x) = \mu_0j^\mu(x) \Rightarrow \Box G(x, x') = \delta^{(4)}(x - x')$

$\delta^{(4)}(x - x') = \delta(ct - ct')\delta^{(3)}(\vec x - \vec x') = \frac{1}{c}\delta(t - t')\delta^{(3)}(\vec x - \vec x')$

$G(x, x') = G(x - x') \quad A^\mu(x) = \mu_0\int d^4x'G(x - x')j^\mu(x')$

$g(x) = \frac{1}{4\pi}\delta(r - ct) \quad r = \sqrt{\vec x^2} \quad x^\mu = (ct, \vec x)$

retadierte Green $G(x - x') = \frac{\theta(t - t')}{4\pi}\frac{1}{|\vec x - \vec x'|}\delta[c(t - t') - |\vec x - \vec x'|]$

$A^\mu(ct, \vec x) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3x'\frac{j^\mu(ct - |\vec x - \vec x'|, \vec x')}{|\vec x - \vec x'|}$

Kovariant CGS

$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c}j^\nu$

$\partial_\mu F_{\nu\rho} + \partial_\nu F_{\rho\mu} + \partial_\rho F_{\mu\nu} = 0$

$\Box A_\mu = \frac{4\pi}{c}j_\mu$

$F^{\mu\nu} = \frac{1}{c}F^{\mu\nu}$

CGS SI

$ct_{ret} = ct - |\vec x - \vec x'| \le ct$ Quelle Ausdehnung: d

$r \gg d$ und $r \gg \lambda$

$\phi(ct, \vec x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r}\int d^3x'\ \rho(ct - r + \vec e_r\cdot\vec x', \vec x')$

$\vec A(ct, \vec x) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{1}{r}\int d^3x'\ \vec j(ct - r + \vec e_r\cdot\vec x', \vec x')$

$\vec B = -\frac{1}{c}\vec e_r\times\dot{\vec A} \quad \dot{\vec E} = c^2\vec\nabla\times\vec B$

$\vec E = \vec e_r\times(\vec e_r\times\dot{\vec A}) = -c\vec e_r\times\vec B \quad \vec E\perp\vec B\perp\vec e_r$

$\vec A(ct, \vec x) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{\mu_0}{r}e^{i\omega(t - r/c)}\tilde{\vec j}(\frac{\omega}{c}\vec e_r)$

$\vec A(ct, \vec x) = \frac{\mu_0}{4\pi r}\int d^3x'\ \vec j(ct - r, \vec x) +$ Dipol

$\frac{\mu_0}{4\pi cr}\int d^3x'(\vec e_r\cdot\vec x')\partial_t\vec j(ct - r, \vec x')$ Quadrupol

$\vec A_1(ct, \vec x) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{1}{r}\dot{\vec p}(ct - r)$

Abgestrahlte Lesitung: $\vec S = \frac{1}{\mu_0}(\vec E\times\vec B)$

$\vec S = \frac{c}{\mu_0}|\vec B|^2\vec e_r = \frac{1}{\mu_0c}|\vec E|^2 = \epsilon_0c|\vec E|^2\vec e_r$

$\frac{dP}{d\Omega} = r^2\vec S\vec e_r = c\epsilon_0r^2|\vec E|^2 = \frac{c}{\mu_0}r^2|\vec B|^2$

$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{dP_{el}}{d\Omega} + \frac{dP_{mag}}{d\Omega} + \frac{\mu_0}{8\pi^2c^2}\vec e_r\cdot(\ddot{\vec p}\times\ddot{\vec m})$

$P_{el.Dipol} = \frac{\mu_0}{6\pi c}\ddot{\vec p}^2 \quad P_{mag.Dipol} = \frac{\mu_0}{6\pi c^3}\ddot{\vec m}^2$

Lienard-Wiechert Potentiale, bewegte Ladung:

$\rho(\vec x, t) = q\delta^{(3)}\left(\vec x - \vec R(t)\right) \quad \vec j(\vec x, t) = q\dot{\vec R}(t)\delta^{(3)}\left(\vec x - \vec R(t)\right)$

$A^\mu(\vec x, t) = \frac{\mu_0qc}{4\pi}\int dt'\frac{\delta(c(t - t') - |\vec x - \vec R(t)|)}{|\vec x - \vec R(t')|}v^\mu(t')$

$f(t') = ct - ct' - r(t') \quad r(t') = |\vec x - \vec R(t')|$

$\frac{df(t')}{dt'} = -c - \frac{dr(t')}{dt'} \quad \frac{dr(t')}{dt'} = -\frac{(\vec x - \vec R(t'))\cdot\dot{\vec R}(t')}{|\vec x - \vec R(t')|}$

$\vec n(t') = \frac{\vec x - \vec R(t')}{|\vec x - \vec R(t')|} \quad \dot f(t') = -c[1 - \vec n(t')\vec\beta(t')] \quad \vec\beta(t) = \frac{1}{c}\dot{\vec R}(t)$

$ct_{ret} = ct - r(t_{ret})$

$A^\mu(\vec x, t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{qv^\mu(t_{ret})}{r(t_{ret})[1 - \vec n(t_{ret})\vec\beta(t_{ret})]}$

$\phi(\vec x, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r(t_{ret})[1 - \vec n(t_{ret})\vec\beta(t_{ret})]}$

$\vec A(\vec x, t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\vec\beta(t_{ret})}{r(t_{ret})[1 - \vec n(t_{ret})\vec\beta(t_{ret})]}$

$\frac{\partial t_{ret}}{\partial t} = 1 - \frac{\partial r(t_{ret})}{\partial t} = 1 + \vec n(t_{ret})\vec\beta(t_{ret})\frac{\partial t_{ret}}{\partial t}$

$\frac{\partial r(t_{ret})}{\partial x^i} = c\frac{\partial t_{ret}}{\partial x^i}$

Gleichförmig Bewegetes Teilchen: $(t_{ret} - t)^2 = \frac{1}{c^2}(\vec x - \vec vt_{ret})^2$

$ct_{ret} = \frac{\gamma}{c}[x\cdot u\pm\sqrt{(x\cdot u)^2 - c^2x^2}]$ u vierer geschw.

$A^\mu(\vec x, t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{qu^\mu}{\sqrt{(u\cdot x)^2/c^2 - x^2}} \quad u^\mu = (\gamma c, \gamma\vec v)$

$\vec E(\vec x, t) = \frac{q\gamma}{4\pi\epsilon_0}\frac{\vec x - \vec vt}{[(u\cdot x)^2/c^2 - x^2]^{3/2}}$

$\vec B(\vec x, t) = \frac{\mu_0q\gamma}{4\pi}\frac{\vec v\times\vec x}{[(u\cdot x)^2/c^2 - x^2]^{3/2}}$

Schwingendes Teilchen: $\vec R = d\sin(\omega t)\vec e_z \quad \vec\beta = kd\cos(\omega t)\vec e_z$

$r = |\vec x| \gg d \quad t_{ret}\approx t - r/c \quad r(t_{ret}) = r(1 - \frac{z}{r^2}z_r)$

$r\vec n\vec\beta|_{t_{ret}} \sim (z - z_r)\frac{\dot z_r}{c}$ mit $z_r := d\sin[\omega(t - \frac{r}{c})]$

Dualer Felst. Tensor: $\tilde F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -B_x & -B_y & -B_z \\ B_x & 0 & E_z & -E_y \\ B_y & -E_z & 0 & E_x \\ B_z & E_y & -E_x & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}F_{\alpha\beta}$

$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0 \quad \partial_\mu\tilde F^{\mu\nu} = 0$

Fourier Ent. $f = f_0 + \sum_1^\infty a_n\cos(n\frac{2\pi}{L}x) + b_n\sin(n\frac{2\pi}{L}x)$

$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L dx f(x)\cos(n\frac{2\pi}{L}x) \quad b_n = \frac{2}{L}\int_0^L dx f(x)\sin(n\frac{2\pi}{L}x)$

$\frac{\partial}{\partial t}W + \vec\nabla\vec S = 0$ herleiten mit $\vec\nabla(\vec E\times\vec B)$