Bewegungsintegrale – Abgeleitete Begriffe

Aus dem zweiten Newton'schen Axiom folgt ein dynamisches Kräftegleichgewicht zwischen der Summe der auf einen Körper der Masse m wirkenden äußeren Kräfte $\vec{F}_A$ und der Trägheitskraft $\vec{F}_T$.

$$\vec{F}_A + \vec{F}_T = 0$$

Ersetzt man die Trägheitskraft durch den Newton'schen Ausdruck, so folgt

$$\vec{F}_A(\vec{r},t) + m\ddot{\vec{r}} = 0$$

Diese Bewegungsgleichung ist eine Differentialgleichung zweiter Ordnung, in der die gesuchte Größe $\vec{r}(t)$ in der zweiten Ableitung auftritt.
Integriert man die Bewegungsgleichung nach der Zeit, so gilt

$$\int_{t_0}^{t} \vec{F}_A(\vec{r},t)dt + \int_{t_0}^{t} m\dot{\vec{v}}dt = \int_{t_0}^{t} \vec{F}_A dt + m\vec{v}(t) - m\vec{v}(t_0)$$

bzw.

$$\int_{t_0}^{t} \vec{F}_A(\vec{r},t)dt + m\vec{v}(t) = m\vec{v}(t_0)$$

Die Summanden auf der linken Seite der Gleichung heißen

Kraftstoß: $\int_{t_0}^{t} \vec{F}_A(\vec{r},t)dt$

Impuls: $m\vec{v}$

Ist die Summe der äußeren Kräfte gleich Null, so ändert sich der Impuls nicht.

Integriert man die Bewegungsgleichung nach dem Ort, so folgt

$$\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F}_A(\vec{r},t)d\vec{r} = -\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} m\frac{d\vec{v}}{dt}d\vec{r}$$

Gehen wir auf der rechten Seite zur neuen Integrationsvariablen dv über, so ist dies nur möglich, wenn auf der linken Seite der Gleichung keine zeit- und geschwindigkeitsabhängigen Größen stehen. In diesem Fall ist eine Trennung der Variablen (linke Seite: Integration über den Ort; rechte Seite: Integration über die Geschwindigkeit) möglich.
Wir setzen im weiteren voraus, dass die Kraft nur vom Ort abhängt. Dann gilt:

$$\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F}_A(\vec{r})d\vec{r} = -\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} m\frac{d\vec{v}}{dt}d\vec{r} = -\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} m\vec{v}d\vec{v}$$

Mithin gilt also:

$$\int \vec{F}_A(\vec{r})d\vec{r} + \frac{m}{2}v^2 = \frac{m}{2}v_0^2 + \int \vec{F}_A(\vec{r})d\vec{r}\,|_{\vec{r}=\vec{r}_0} = E_0$$

Die Größen auf der linken Seite der Gleichung heißen:

Kinetische Energie:	$\frac{m}{2}v^2$
Potentielle Energie:	$\int \vec{F}_A(\vec{r})d\vec{r}$
Arbeit:	$\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}_A(\vec{r})d\vec{r}$

Die Summe aus kinetischer und potentieller Energie bezeichnet man als mechanische Energie. Die mechanische Energie ist eine Erhaltungsgröße und hat den Betrag E_0, wenn die wirkenden äußeren Kräfte nur vom Ort abhängen. Ist die mechanische Energie eine Erhaltungsgröße, so ist sie ein Integral der Bewegungsgleichung.

Wir bleiben bei Kräften, die nur ortsabhängig sind. Solche Kräfte nennt man konservativ, da sie die Voraussetzung für die Gültigkeit von Erhaltungssätzen sind. Wir hatten folgende Gleichung (siehe oben):

$$\int_{t_0}^{t} \vec{F}_A(\vec{r},t)dt + m\vec{v}(\vec{r},t) = m\vec{v}(\vec{r},t_0)$$

Umgeschrieben lautet sie (jetzt für zeitunabhängige Kräfte):

$$\vec{F}_A(\vec{r})t + m\vec{v} = \vec{F}_A t_0 + m\vec{v}_0 = f(\vec{r})$$

Diese Gleichung soll jetzt auf einem geschlossenen Weg integriert werden:

$$\oint \left[\vec{F}_A(\vec{r})t + m\vec{v}\right]d\vec{r} = \oint f(\vec{r})d\vec{r} = L$$

Da das Ringintegral über eine konservative Kraft verschwindet, bleibt folgendes (mit p=mv) übrig:

$$L = \oint \vec{p}d\vec{r}$$

L heißt Drehimpuls.