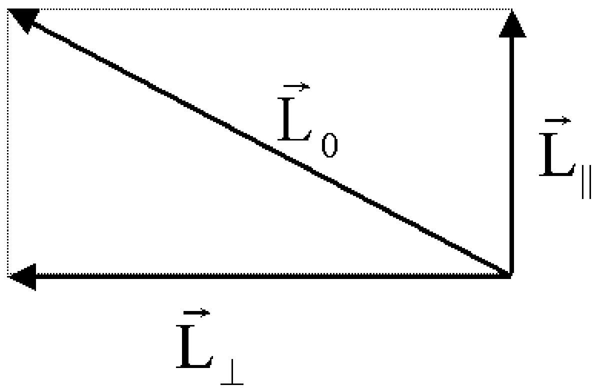
Drehstuhlexperiment I

Im Versuch wird ein rotierendes Rad mit der Kreisfrequenz $\vec{\omega}_0$ und dem Trägheitsmoment I_{Rad} einer Person auf einem Drehstuhl mit dem Gesamtträgheitsmoment I_{Stuhl} (einschließlich Person) und der Anfangskreisfrequenz $\vec{\omega}_{Stuhl\|} = 0$ übergeben. Die Drehachse des Rades zeigt zu Beginn senkrecht zum Schwerkraftvektor.

Wir zerlegen den Gesamtdrehimpuls $\vec{L}$ in eine Komponente $\vec{L}_{\|}$ parallel zur Schwerkraft und einen zweiten Vektor $\vec{L}_{\perp}$ senkrecht zur Schwerkraft.



Allgemein gilt für jede Komponente von $\vec{L}$:

$$L_i = L_{iRad} + L_{iStuhl}$$

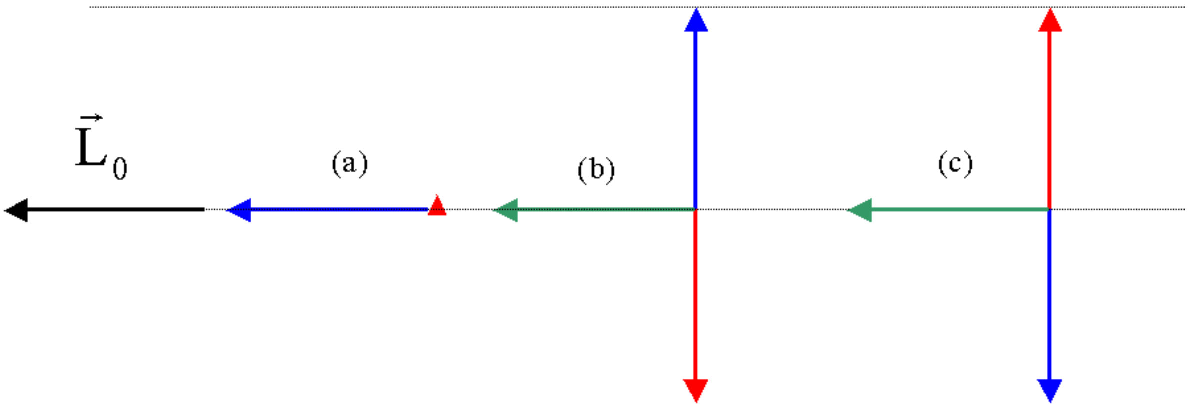
Im zu beschreibenden Experiment wird das rotierende Rad der Versuchsperson auf dem Stuhl so übergeben, dass die Radachse senkrecht zur Stuhlachse zeigt. Der Stuhl ist zunächst fixiert, so dass sich der gesamte Drehimpuls im Rad befindet. Nach Loslassen des Stuhles ändert sich zunächst nichts. Es gelten also folgende Anfangsbedingungen:

$$\vec{L}_0 = \vec{L}_{\perp} = I_{Rad} \cdot \vec{\omega}_0$$

$$\vec{L}_{\|Stuhl} = 0$$

$$\vec{L}_{\perp} = L_0$$

Jetzt wird das Rad einmal um 90° gedreht (Radachse parallel zur Stuhlachse) und danach um -90° (Radachse antiparallel zur Stuhlachse):



roter Vektor:	Drehimpuls des Stuhles (mit Person)
blauer Vektor:	Parallele Drehimpulskomponente des Rades
grüner Vektor:	Senkrechte Drehimpulskomponente
grüner Punkt:	Kennzeichnung der rechten Hand.

Die Drehzahl des Stuhles erhöht sich kontinuierlich bei Kippung des Rades. Durch die Drehung des Stuhles wird der Drehimpuls des Rades in vertikaler Richtung kompensiert. Stellt man die Achse von parallel zu antiparallel, kehrt sich die Drehrichtung um. Insgesamt bleibt die parallele Drehimpulskomponente immer gleich Null. Die Zunahme der Drehzahl wird gut durch die Bildunschärfe der Hand verdeutlicht.

±90°-Drehung

Der Drehimpulserhaltungssatz liefert:

$$\vec{L}_{||} = 0 = I_{Rad||}\vec{\omega}_R + I_{Stuhl||}\vec{\omega}_{Stuhl}$$

$$\omega_{Stuhl} = \mp\omega_{Rad}\frac{I_{Rad||}}{I_{Stuhl||}}$$

Im Falle einer Drehung der Radachse von ±90° muss die Drehimpulskomponente in senkrechter Richtung erhalten bleiben. (siehe grüne Pfeile in obiger Abbildung). Während in vertikaler Richtung die Drehbewegung von der Unterlage entkoppelt ist (jedenfalls nahezu bei idealer Lagerung), tritt in horizonaler Richtung eine Drehimpulskopplung mit dem Erdball auf (wäre der Stuhl kardanisch gelagert, würde er sich nunmehr um die Richtung von L_0 zu drehen beginnen):

$$I_{Rad}\omega_0 = (I_{Erde} + I_{Rad\perp})\cdot\Delta\omega_{Erde}$$

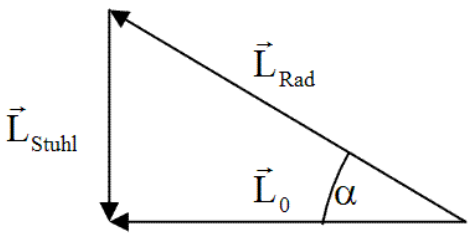
Wegen des riesigen Massenträgheitsmomentes der Erde ist ihre Drehimpulsänderung, die den Drehimpuls des Rades aufnimmt, zwar gleich groß, führt aber zu einer vernachlässigbaren Drehzahländerung:

$$\Delta\omega_{Erde} \approx 10^{-24}\omega_0 \approx \omega_0\frac{I_{Rad}}{I_{Erde}}$$

Im folgenden soll geklärt werden, ob sich die Frequenz des Rades bei der Drehung verändert und ob Erhaltung der Rotationsenergie vorliegt. Hierzu soll der Übergang bei der Drehung aus der horizontalen in die vertikale Richtung näher untersucht werden:

Beliebiger Winkel

Die folgende Skizze findet man im Lehrbuch von Tipler/Mosca (Seite 308):



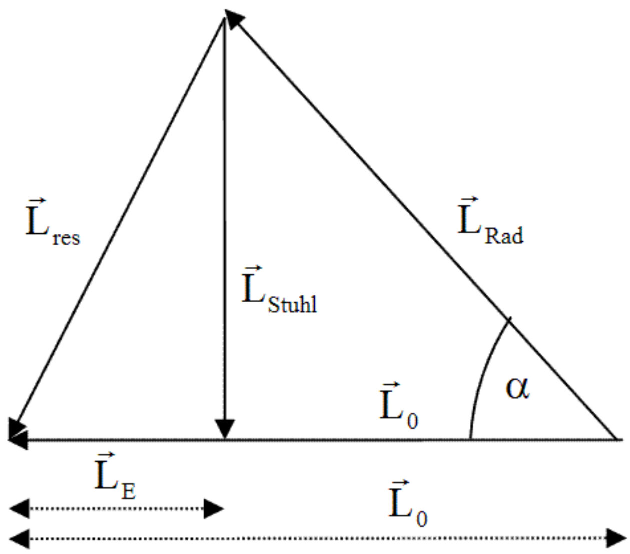
Der Drehimpuls des Stuhles ergibt sich zu

$$L_{Stuhl} = L_{Rad} \sin\alpha$$

Und damit wie oben

$$\omega_{Stuhl} = \mp\omega_{Rad} \frac{I_{Rad||}}{I_{Stuhl||}} \sin\alpha$$

Allerdings würde L_{Rad} und damit die Frequenz des Rades mit steigendem Winkel α zunehmen und für 90° sogar divergieren. Dasselbe ergäbe sich für die Drehzahl des Stuhles. Wir gehen deshalb von folgender Skizze aus:



Die Radachse werde um den Winkel α geneigt. Die Frequenz des Rades wird nicht konstant gesetzt. Sie soll sich aus der Rechnung ergeben. Der Gesamtdrehimpuls L_0 bleibt erhalten und wird in L_{Rad} und L_{res} zerlegt. Gezeichnet ist der Fall $L_{Rad} = L_0$, dies wird jedoch nicht vorausgesetzt.
Freie Achsen existieren in Richtung L_{Stuhl} und L_{Rad}. Die dritte, nicht unmittelbar sichtbare Achse zeigt in Richtung L_0. Der Drehimpuls L_{res} wird zerlegt in Richtung der Stuhlachse und in Richtung L_0. Wenn die Radachse geneigt wird, beginnt der Stuhl entsprechend L_{Stuhl} zu drehen. Die Horizontalkomponente von L_{Rad} reicht jedoch nicht mehr aus, um L_0 zu erzeugen. Deshalb tritt die zusätzliche Komponente L_E auf. Wäre der Stuhl kardanisch gelagert, würde er mit dem Drehimpuls L_E um L_0 zu rotieren beginnen. Für $\alpha = 90°$ wäre dann $L_E = L_0$. In diesem Fall erwartet man, dass ein kardanisch gelagerter Stuhl um die Horizontalachse mit ω_0 und um die Vertikalachse mit ω_{Stuhl} (siehe oben) rotiert. Da der Stuhl fixiert ist, wird der Drehimpuls an die Erde abgegeben.
Nun die Rechnung:

Aus den Dreiecken entnimmt man zunächst:

$$L^2_{Rad} = L^2_{Stuhl} + \left(L_0 - L_E\right)^2$$

$$L^2_E + L^2_{Stuhl} = L^2_{res}$$

$$L^2_{res} = L^2_{Rad} + L^2_0 - 2L_{Rad}L_0 \cos\alpha$$

Wir erhalten aus den letzten Gleichungen:

$$L_{Stuhl} = L_{Rad} \sin\alpha$$

$$L_0 - L_E = L_{Rad} \cos\alpha$$

	0°	90°
L_{Stuhl}	0	$L_{Rad} = L_0 \rightarrow 0$
L_E	$L_0 - L_{Rad} = 0 \rightarrow L_0$	L_0

Der Drehimpuls L_{Rad} folgt nicht aus den obigen Gleichungen (3 Gleichungen mit 4 Unbekannten). Aus der Anfangsbedingung für $\alpha = 0$ wäre jedoch auf $L_0 = L_{Rad}$ zu schliessen. Nimmt die Radfrequenz durch Reibung ab, so bleibt der Drehimpuls trotzdem erhalten. Die Stuhldrehzahl würde allerdings abnehmen, L_E aber zunehmen (d.h. der Drehimpuls wird an die Erde übertragen). Die Beziehung zwischen L_{Stuhl}, L_E und L_0

$$L_{Stuhl} \cos\alpha = \left(L_0 - L_E\right) \sin\alpha$$

hängt nur insofern von der Radfrequenz ab, als L_0 von L_{Rad} bestimmt ist.